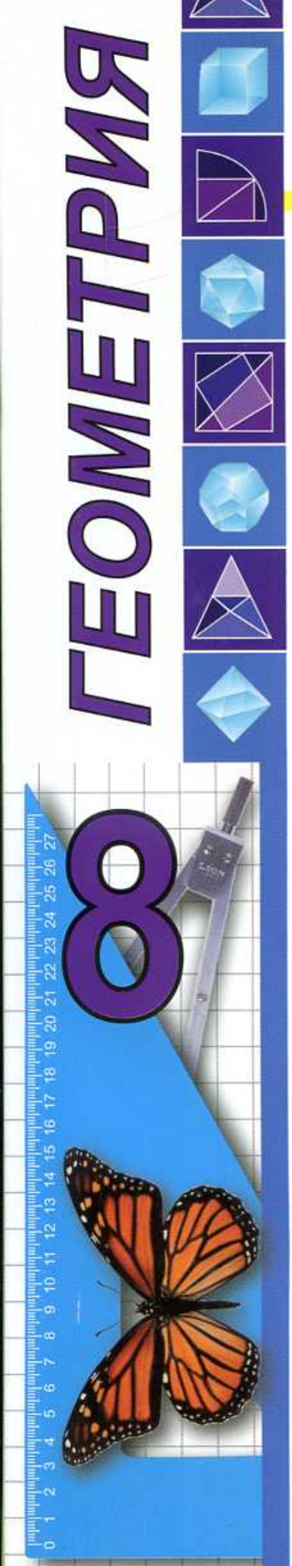



ФГОС

УМК

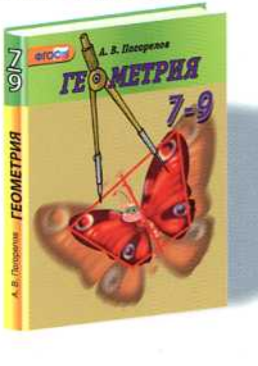
*Т. М. Мищенко*

# Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя **по геометрии**

***К учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»***

- *Методы решения задач*
- *Тематическое планирование*
- *Планы уроков*
- *Объяснение сложных тем*
- *Контрольные и самостоятельные работы*
- *Указания к задачам, решения*

# 8 класс




ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Т. М. Мищенко

# Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику А. В. Погорелова
«Геометрия. 7–9 классы» (М. : Просвещение)

## 8 класс

*Рекомендовано
Российской Академией Образования*

***Методы решения задач
Тематическое планирование
Планы уроков
Объяснение сложных тем
Контрольные
и самостоятельные работы
Указания к задачам, решения***

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2014

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
М71



**Мищенко Т. М.**

М71 Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы» / Т. М. Мищенко. — М. : Издательство «Экзамен», 2014. — 206, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-07594-3

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Предлагаемые дидактические материалы и методические рекомендации призваны помочь учителю, работающему по учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы».

Пособие написано к учебнику, переработанному в соответствии со Стандартом второго поколения. Пособие полностью соответствует требованиям, предъявляемым Стандартом второго поколения к уровню изложения теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения, как обязательного уровня, так и повышенного уровня сложности.

Структура контрольных работ и форма заданий соответствуют структуре и форме заданий Государственной итоговой аттестации (ГИА).

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у учащихся умение применять полученные знания, как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

В пособии по *каждой главе* дается общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, методических особенностей ее изучения; контрольная работа.

По *каждому параграфу* дается комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания параграфа, требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала для учителя; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

**УДК 372.8:514**
**ББК 74.262.21**

Подписано в печать 29.10.2013. Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 8,37. Усл. печ. л. 13. Тираж 10 000 экз. Заказ № 3076.

**ISBN 978-5-377-07594-3**

# Содержание

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена учителю, работающему в восьмых классах по учебнику А.В. Погорелова «Геометрия, 7–9» (М., Просвещение, 2012).В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с концепцией построения учебника, и позволяющие учителю сориентироваться в методических особенностях изложения учебного материала. Методические рекомендации написаны к учебнику, переработанному в соответствии со Стандартом второго поколения, и полностью соответствуют требованиям, предъявляемым Стандартом второго поколения к уровню усвоения учащимися теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения как обязательного, так и повышенного уровня сложности.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у школьников умение применять полученные знания, как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

Основными особенностями авторского подхода к изложению учебного материала является разумное сочетание строгости логических рассуждений с опорой на наглядность при дедуктивном построении курса. Такой подход определяет и главный метод работы учителя с классом: *обучение по образцам*, а именно, практически *каждая теорема курса должна быть доказана учителем у доски* независимо от того, будет или нет воспроизведение этого доказательства позднее требоваться от учащихся.

При обучении в восьмом классе важно требовать от учащихся четкие формулировки и грамотные ссылки на раннее изученные геометрические факты. При этом целесообразно, чтобы при вхождении в тему образец ответа давал сам учитель. Требования же при оценке ответов учащихся и их письменных работ должны быть дифференцированными.

Отсюда следует, что большую часть урочного времени необходимо использовать для решения задач. В учебнике задачам отводится чрезвычайно важная роль. Некоторые из них содержат интересные геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебного пособия. Все задачи учебника соответствуют требованиям планируемых результатов обучения как их определяет Стандарт: либо как задачи обязательного уровня, либо как задачи повышенного уровня сложности.

Определенную сложность для учителя представляет необходимость взвешенного сочетания при решении задач письменных и устных форм работы. Письменные формы работы являются важнейшим видом деятельности, формирующим устойчивые навыки в проведении логических рассуждений при решении задач. Форма записи условия задачи, разумные, естественные и исторически сложившиеся сокращения и обозначения при вычислениях и доказательствах дисциплинируют мышление. Вместе с тем заметим, что увлечение письменными видами работы на уроках и дома приводят к большим и не всегда оправданным затратам времени и тормозит развитие устной геометрической речи.

Основное назначение данной книги — помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В ней даются:

*по каждой главе* — общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, контрольная работа;

*по каждому параграфу* — комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания и требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Рубрика **«Методические рекомендации к изучению материала для учителя»**. ***Весь материал данного раздела полностью адресован учителю и только учителю.*** Здесь учитель получает некоторую оценочную рекомендацию к изучению материала, в которой расставлены акценты и указаны приоритеты. Все методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу, уровню подготовки учащихся. Такая адаптация может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы за счет часов, отводимых на решение задач, или резерва.

В рекомендациях к изложению теоретического материала рассматриваются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, рекомендуются упражнения для усвоения и закрепления материала. Для некоторых наиболее сложных теорем даются примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях.

В большинстве случаев достаточно записать план доказательства или узловые моменты доказательства. Целесообразно сопроводить и доказательства теорем, и определения, и решения задач чертежами. Важно, чтобы учащиеся научились «видеть» условие задачи. Главное — увидеть, увидел — понял, записал условие, затем решил и доказал. Важную роль играет умение делать чертеж. Чертеж становится элементом решения и составной частью решения, среди изучаемых методов есть и специальные методы построения чертежа. Такая работа будет способствовать развитию пространственного воображения.

Издательство «Экзамен» издает также рабочие тетради к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9»; в методических рекомендациях указываются места их применения и даются рекомендации по их использованию.

В методических указаниях есть ссылки на сборник тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение», которые можно использовать для проведения текущего контроля. При этом даются рекомендации на их использование.

Привлечение наглядных представлений не только не противоречит основному принципу построения курса, но является его методической особенностью. К каждой теме курса в учебнике даны фотографии, иллюстрирующие не только прообразы геометрических фигур, но и некоторые их свойства, а в рекомендациях даются методические указания, как использовать эти фотографии в учебном процессе. Кроме того, приведенные в учебнике фотографии позволяют увидеть связь между геометрией и окружающим миром.

Рубрика «**Примерное планирование изучения материала**». Задачи к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического материала. Поэтому кроме задач, указанных в разделе «Методические рекомендации к изучению материала для учителя», включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из задач этапа первичного закрепления в процессе изучения темы состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения, новые алгоритмы и методы решения задач. Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

При распределении учебного времени на изучение каждого параграфа последние несколько уроков отводятся: на решение задач, один урок на контрольную работу и заключительный урок для разбора ошибок контрольной работы и подведения итогов. На уроках решения задач рекомендуется решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы и провести подготовку к контрольной работе. В каждом параграфе резервируется несколько уроков для корректировки предложенного планирования в зависимости от особенностей класса и уровня подготовки учащихся.

В рубрике **«Указания к задачам»** приведены схемы решения основных (опорных задач) и решения наиболее трудных задач.

**«Дополнительные задачи»** образуют некоторый резерв. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие — подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи могут быть использованы для индивидуальных заданий.

Целью **самостоятельных** и **контрольных работ** является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки самостоятельных и контрольных работ позволяют зафиксировать не только достижение или недостижение учащимися уровня обязательной подготовки, но также достижение повышенного уровня обученности. В работах проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Структура контрольных работ и форма заданий соответствуют структуре и форме заданий Государственной Итоговой Аттестации (ГИА).

В методических указаниях есть ссылки на сборник тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение», которые можно использовать для проведения текущего контроля.

Кроме того, для контроля достижения учащимися уровня обязательной подготовки рекомендуется использовать сборник тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение».

# § 6. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Особенностью данного параграфа, определяющей некоторые методические трудности при работе с ним, является его место в учебном процессе, а именно начало нового учебного года. Это ставит перед учителем задачу: повторения основных тем курса геометрии седьмого класса в процессе изучения основного материала.

Учебный материал данного параграфа группируется вокруг четырехугольников, при этом доказательство почти всех теорем, а также решеиия многих задач ведется с использованием признаков равенства треугольников. Так же активно применяются свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей и признаки параллельности прямых, теорема о сумме углов треугольника, свойства прямых и отрезков, связанных с окружностью, а в задачах на построение — свойства окружности. Таким образом, как видно из вышесказанного, инструментарий, используемый в этом параграфе, учащиеся знают из курса седьмого класса, а значит, изучение темы полезно организовать как процесс обобщения и систематизации знаний учащихся.

Уровень геометрической подготовки учащихся и содержание изучаемой темы позволяют определить основную форму работы в виде *беседы* с активным привлечением школьников на всех этапах урока: при введении нового материала; его закреплении; решении задач.

Исходя из авторской концепции краткого учебника в теоретической части параграфа, как впрочем, и в теоретической части всего учебника, рассматриваются только те свойства изучаемых четырехугольников, которые необходимы для построения курса геометрии.

Значительное внимание должно быть уделено задачам, в ходе решения которых применяются определения, свойства и признаки четырехугольников, а в результате их решения доказываются дополнительные свойства и признаки четырехугольников (15, 21, 22, 28, 29, 31). В дальнейшем для обоснования решения задач можно и нужно использовать свойства и признаки четырехугольников, полученные при решении задач.

В результате изучения темы «Четырехугольники» учащиеся не только получают новые для них знания о свойствах и признаках четырехугольников, но при этом еще происходит систематизация и обобщение знаний учащихся о свойствах треугольников, признаках равенства треугольников, равнобедренных треугольниках, признаках и свойствах параллельных прямых, свойства прямых и отрезков, связанных с окружностью.

**Планируемые итоговые результаты изучения шестого параграфа:**

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: выпуклые и невыпуклые четырехугольники, вписанные и описанные четырехугольники, параллелограммы, прямоугольники, ромбы, трапеции, средние линии треугольников и трапеции;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст;

– выделять в чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задачи;

– иллюстрировать и объяснять основные свойства и признаки четырехугольников, теорему Ферма и теорему о пропорциональных отрезках;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения, свойства и признаки четырехугольников;
- теорему Ферма и теорему о пропорциональных отрезках.

## Определение четырехугольника

### Комментарий для учителя

В этом пункте систематизируются знания учащихся о четырехугольниках, полученные ими в процессе изучения математики в I–VI классах. Поэтому в методическом плане понятия, вводимые в этом параграфе, достаточно просты и в известной степени знакомы учащимся, а значит, не требуют значительной отработки. Это позволяет закрепление введенной терминологии соединить с повторением вопросов курса VII класса, наиболее важных для изучения последующего материала. Для этого можно использовать несложные задачи на применение признаков равенства треугольников, признаков параллельности прямых, свойств углов при параллельных прямых, суммы углов треугольника, свойства прямых и отрезков, связанных с окружностью.

**Текущие результаты** изучения пункта 50. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках четырехугольники и их элементы, вписанные и описанные четырехугольники;

– *формулировать и объяснять формулировку* определений: четырехугольника и его элементов, вписанного и описанного четырехугольника;

– *решать* задачи с использованием определений четырехугольника вписанного и описанного четырехугольника.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Как было сказано выше, на первом уроке следует уделить время повторению материала VII класса.

Издательство «Просвещение» издает тесты «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику А.В. Погорелова автора Т.М. Мищенко. Первый тест (входной контроль) из этого сборника позволяет провести повторение основных тем курса и оперативную проверку геометрических знаний учащихся за курс седьмого класса, и получить прогнозируемую оценку успешности обучения в восьмом и девятом классах. Кроме того, анализ входного теста позволяет выявить возможные пробелы в знаниях, как отдельного ученика, так и класса в целом, и тем самым в процессе изучения соответствующих тем скорректировать знания учащихся.

Задания первого теста направлены на проверку основных умений и навыков, формируемых при изучении курса седьмого класса:

– изображать геометрические фигуры и различать их взаимное расположение; выполнять чертежи по условию задач, выделять из данной конфигурации заданные в условии задачи элементы;

– вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, применяя:

- свойства измерения отрезков и углов, определения и свойства смежных и вертикальных углов;
- признаки равенства треугольников;
- свойства и признаки равнобедренного треугольника;
- аксиому параллельных прямых и следствия из нее; свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей; признаки параллельности;
- теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника;

- признаки равенства прямоугольных треугольников; свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°;
- свойства прямых и отрезков, связанных с окружностью.

Наиболее значимым является задание 3, оно является прямой пропедевтикой к изучению темы: «Четырехугольники».

Если не использовать в процессе изучения 8 класса предложенные тесты, то повторение можно организовать по следующей схеме.

Для повторения *признаков равенства треугольников* можно использовать следующие задачи:

1. В четырехугольнике $ABCD$ соседние стороны $AB$ и $AD$ равны. Диагональ $AC$ образует с этими сторонами равные углы. Докажите равенство треугольников $ABC$ и $ADC$ (рис. 1).

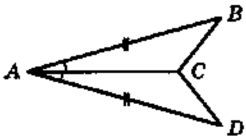



*Рис. 1*

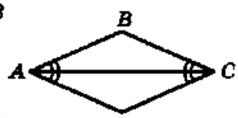



*Рис. 2*

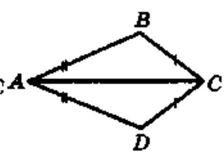



*Рис. 3*

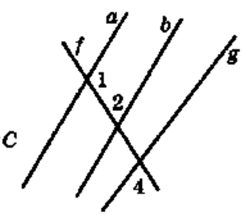



*Рис. 4*

2. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ $AC$ образует со сторонами четырехугольника равные углы: $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = \angle DCA$. Докажите равенство треугольников $ABC$ и $ADC$ (рис. 2).
3. Известно, что в четырехугольнике $ABCD$: $AB = AD$ и $BC = CD$. Докажите равенство треугольников $ABC$ и $ADC$ (рис. 3).
4. Диагонали четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам. Одна из сторон четырехугольника равна 3 см. Чему равна противолежащая ей сторона четырехугольника?

Эти задачи позволяют повторить все три признака равенства треугольников, проверить умение: из равенства треугольников выделять равенство соответствующих элементов. Работу рекомендуется провести фронтально с широким привлечением учащихся.

***При использовании в процессе обучения рабочей тетради для повторения* признаков равенства треугольников *можно предложить учащимся выполнить задачи 1–4. Следует заметить, что это те же задачи, что и приведенные выше. Решение задач в классе провести устно, а дома оформить в тетради. Рисунок к задаче 4 следует сделать в классе на доске и в тетрадях по условию задачи.***

**Для повторения *признаков параллельности прямых и свойств углов при параллельных прямых и секущей* можно использовать следующие задачи:**

**1. По рисунку ответьте на вопросы (рис. 4).**

**а) Параллельны ли прямые $a$ и $b$, если $\angle 1 + \angle 2 = 180°$?**

**б) Параллельны ли прямые $a$ и $b$, если $\angle 1 + \angle 2 \neq 180°$?**

**в) Параллельны ли прямые $b$ и $g$, если $\angle 2 = 58°$, а $\angle 4 = 74°$?**

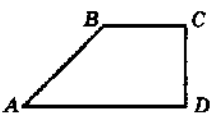


*Рис. 5*

**2. Известно, что в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 5) прямые $BC$ и $AD$ параллельны, $\angle A = 53°$. Найдите градусную меру $\angle B$.**

**Решение задач в классе провести устно. К задачам необходимо заранее сделать рисунки (рис. 4 и 5).**

***В рабочей тетради для повторения* признаков параллельности прямых и свойств углов при параллельных прямых и секущей *можно предложить учащимся выполнить задачи 5 и 6. Следует заметить, что это те же задачи, что и приведенные выше.***

**Для повторения свойств *прямых и отрезков, связанных с окружностью*, можно использовать следующие задачи:**

**1. Из одной точки окружности проведены хорда, равная радиусу данной окружности, и диаметр. Найдите угол между ними.**

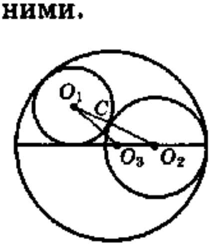


*Рис. 6*

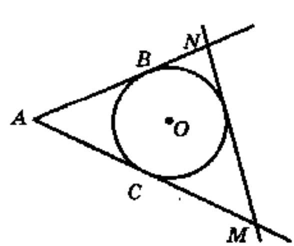
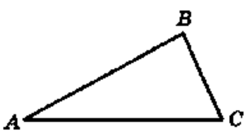


*Рис. 7*

2. Три окружности с центрами в точках $O_1$, $O_2$ и $O_3$ (рис. 6) касаются друг друга так, как показано на рисунке. Радиусы окружностей равны 12 см, 8 см и 3 см. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.
3. Окружность с центром в точке $O$ касается сторон угла $BAC$ ($B$ и $C$ — точки касания). Касательная $MN$ к этой окружности пересекает стороны угла $AB$ и $AC$ соответственно в точках $N$ и $M$ (рис. 7). Найдите длину отрезка $AC$, если периметр треугольника $AMN$ равен 24 см, а касательная $MN$ равна 7 см.

Эти задачи позволяют повторить свойство касательных к окружности, взаимное расположение окружностей, проверить умение применять их в нестандартных ситуациях. Решение задач в классе провести устно. К задачам необходимо заранее сделать рисунки (рис. 6 и 7). Работу рекомендуется провести фронтально с широким привлечением учащихся. Рисунок к задаче 1 следует сделать в классе на доске по условию задачи.

*В рабочей тетради для повторения свойств* ***прямых и отрезков, связанных с окружностью,*** *можно предложить учащимся выполнить задачи 7–9. Следует заметить, что эти задачи те же, что и приведенные выше. Рисунок к задаче 7 следует сделать в классе на доске и в тетрадях по условию задачи. Если учебное время и уровень подготовки класса позволяет, полезно рассмотреть решение задачи 10, повышенной сложности.*




а)


б)

Рис. 8

2°. Введение определения *четырехугольника* полезно начать с повторения определения треугольника. При этом в определении *треугольника* следует обратить внимание учащихся на то, что три точки, являющиеся вершинами треугольника, не лежат на одной прямой, продемонстрировав два рисунка (рис. 8, а, б). На первом из рисунков точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой, а на втором три точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой и треугольника не существует.

При введении определения *четырехугольника* следует по аналогии с определением треугольника обратить внимание учащихся как на условие расположения точек: *«...никакие три из них не лежат на одной прямой»*, так и на условие расположения отрезков *«соединяющие точки отрезки не должны пересекаться»*. После этого в качестве контрпримеров можно привести рисунки 9 б и в.

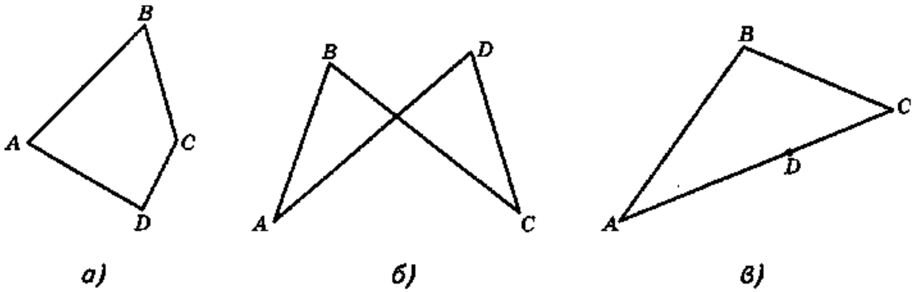



*Рис. 9*

Обозначив буквами вершины четырехугольника, изображенного на рисунке 9 а, необходимо заметить, что четырехугольник обозначается последовательной записью его вершин, например четырехугольник $ABCD$ или $BCDA$. Элементы *четырехугольника* знакомы учащимся на наглядном уровне из курсов математики I–VI классов. Поэтому можно предложить учащимся указать вершины и стороны изображенного четырехугольника, а введение определений соседних и противолежащих вершин и сторон и диагонали полезно выполнить с активным привлечением учащихся. Для этого использовать тот же рисунок (9 а):

1. Укажите пары соседних вершин.
2. Укажите пары противолежащих вершин.
3. Укажите пары соседних сторон.
4. Укажите пары противолежащих сторон.
5. Укажите углы четырехугольника.
6. Укажите диагонали четырехугольника.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения* ***четырехугольника*** *и выполнить упражнение 11, которое является аналогом работы по рисунку 9. Затем предложить учащимся выше приведенные вопросы 1–5 разобрать в ходе работы над упражнениями 12 и 13. Шестой вопрос сформулирован в упражнении 14. Перед его выполнением следует записать определение* ***диагоналей четырехугольника****.*

**3°**. Понятие *периметра* известно учащимся с начальной школы, поэтому необходимо простое напоминание. Сначала полезно повторить определение *периметра* треугольника, а затем предложить учащимся сформулировать определение *периметра четырехугольника*.

Для закрепления понятия *периметра* можно использовать следующие задачи:

> 1. В четырехугольнике $ABCD$: стороны $AB$ и $AD$ равны, а диагональ $AC$, равная 9 см, образует со сторонами $AB$ и $AD$ равные углы: $\angle BAC = \angle DAC$ (рис. 1). Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если периметр треугольника $ADC$ равен 23 см.
> 2. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ $AC$ образует со сторонами четырехугольника равные углы: $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = \angle DCA$ (рис. 2). Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если сторона $AB = 5$ см.

Следует обратить внимание учащихся на то, что приведенные здесь задачи 1 и 2, в которых надо найти периметры четырехугольников, являются фактически продолжением задач 1 и 2 из задач для повторения *признаков равенства треугольников*. Поэтому полезно напомнить учащимся, что было доказано в задачах 1 и 2 из задач для повторения *признаков равенства треугольников*. Задачи рекомендуется решить устно.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради для закрепления понятия* периметра *можно предложить учащимся выполнить задачи 15 и 16, которые дублируют выше приведенные задачи.*

**4°**. При введении определений *четырехугольника, вписанного в окружность*, и *четырехугольника, описанного около окружности*, полезно обратить внимание учащихся на то, что, если в условии сказано: «*четырехугольник, вписанный в окружность*» то это значит, что задана и «*окружность, описанная около этого четырехугольника*». Аналогично и для *четырехугольника, описанного около окружности*.

На прямое применение определения *четырехугольника, вписанного в окружность*, можно решить задачу 1 из дополнительных задач.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения* ***четырехугольника, вписанного в окружность****, и решить задачу 21.*

В задаче 5 учебника рассматривается важное свойство *четырехугольника, описанного около окружности*: *«Суммы противолежащих сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны»*. Перед ее решением полезно вспомнить свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности.

На прямое применение свойства *четырехугольника, вписанного в окружность*, можно решить задачу 2 из дополнительных задач.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения* ***четырехугольника, описанного около окружности****, решить задачи 22 и 23.*

4*. После рассмотрения свойства *четырехугольника, описанного около окружности*, можно предложить учащимся сформулировать признак *четырехугольника, описанного около окружности*: *«Если в выпуклом четырехугольнике, суммы противолежащих сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность»*.

Доказательство *признака описанного многоугольника* достаточно сложно и его рекомендуется в соответствии с приведенным ниже текстом доказательства провести самому учителю.

При этом необходимо подчеркнуть, что свойство и признак *четырехугольника, описанного около окружности*, являются обратными утверждениями. Полезно выполнить на доске краткую запись условия и заключения обеих утверждений (рис. 10).

| Прямая теорема. | Обратная теорема. |
|---|---|
| *В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.*<br><br>Дано: $ABCD$ — *четырехугольник*;<br>$O$ — *центр окружности, вписанной в* $ABCD$. | *Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.*<br><br>Дано: $ABCD$ — *четырехугольник*;<br>$AB + CD = BC + AD$. |
| Доказать: $AB + CD = BC + AD$. | Доказать: $O$ — *центр окружности, вписанной в* $ABCD$. |

*Рис. 10*

В классе полезно ознакомить учащихся с доказательством признака описанного четырехугольника, однако требовать от учащихся его воспроизведения не рекомендуется.

Доказательство признака описанного четырехугольника.

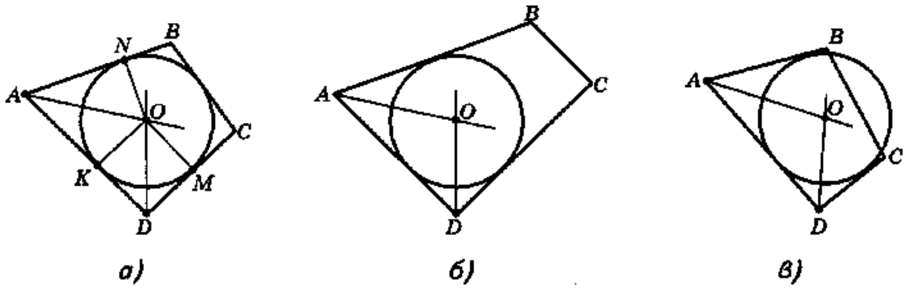



*Рис. 11*

В четырехугольнике $ABCD$: $AO$ — биссектриса $\angle BAD$ и $DO$ биссектриса $\angle ADC$ (рис. 11 а). Следовательно, $ON = OK = OM$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ окружность с центром в точке $O$ касается трех сторон. Докажем, что тогда она касается и стороны $BC$.

Предположим, что это не так. Тогда:

1) Сторона $BC$ не имеет общих точек с окружностью (рис. 11 б);

2) Прямая, содержащая сторону $BC$, является секущей (рис. 11 в).

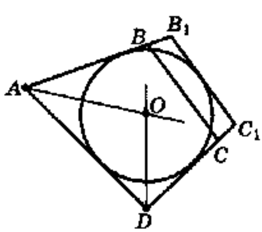



*Рис. 12*

Рассмотрим второй случай. Проведем касательную $B_1C_1$ к окружности, параллельную стороне $BC$ (рис. 12).

Четырехугольник $AB_1C_1D$ — описанный около окружности по определению, значит, $AB_1 + DC_1 = AD + B_1C_1$, при этом, $AB_1 = AB + B_1B$ и $DC_1 = DC + CC_1$. Отсюда

$$AB + B_1B + DC + CC_1 = AD + B_1C_1;$$
$$AB + DC - AD = B_1C_1 - B_1B - CC_1.$$

По условию $AB + DC = AD + BC$, $AD = AB + DC - BC$.

Значит, $AB + DC - AB - DC + BC = B_1C_1 - B_1B - CC_1$; $BC = B_1C_1 - B_1B - CC_1$. Отсюда $B_1C_1 = BC + B_1B + CC_1$.

Противоречие: в четырехугольнике $BB_1C_1C$ сторона $B_1C_1$ не может равняться сумме трех других сторон.

Аналогично доказывается первый случай.

Следовательно, окружность касается стороны $BC$ и четырехугольник $ABCD$ — описанный около окружности.

*В рабочей тетради даны записи условий теорем о свойстве и признаке четырехугольника, описанного около окружности, и приведено доказательство признака четырехугольника, описанного около окружности. Задачу 24 можно предложить наиболее сильным учащимся.*

5. В Методических указаниях есть ссылки, которые можно использовать для проведения текущего контроля.

На первом уроке восьмого класса рекомендуется провести входной контроль (тест). Для этого можно использовать тест из сборника тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение». Этот тест позволяет провести оперативную проверку геометрических знаний учащихся за курс седьмого класса, и получить прогнозируемую оценку успешности обучения в восьмом и девятом классах. Кроме того, анализ входного теста позволяет выявить возможные пробелы в знаниях, как отдельного ученика, так и класса в целом, и тем самым в процессе изучения соответствующих тем скорректировать знания учащихся.

Задания первого теста направлены на проверку основных умений и навыков, формируемых при изучении курса седьмого класса:

– вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, применяя:

– свойства измерения отрезков и углов, определения и свойства смежных и вертикальных углов;

– признаки равенства треугольников;

– свойства и признаки равнобедренного треугольника;

– аксиому параллельных прямых и следствия из нее; свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей; признаки параллельности;

– теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника;

– признаки равенства прямоугольных треугольников; свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°.

Наиболее значимым является задание 3, оно служит прямой пропедевтикой к изучению темы: «Четырехугольники».

Тест рассчитан на 30 минут.

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — повторить в ходе решения задач признаки равенства треугольников, признаки параллельности прямых и свойства углов при параллельных прямых и секущей, свойства касательных к окружности; провести тестирование по курсу 7 класса; дома — сформировать домашнее задание из задач 3–9 дополнительных задач методического пособия.

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 50; дома — вопросы 1–5 из § 6, задачи 1 и 2 из учебника (устно); сформировать письменное задание из задач 3–9 дополнительных задач методического пособия.

> *В рабочей тетради домашнее задание сформировать из задач 17–20 и 25–28.*

## Дополнительные задачи

**1.** Диаметры окружности с центром в точке $O$ являются диагоналями вписанного четырехугольника $ABCD$. Сторона $AB$ четырехугольника $ABCD$ равна 7 см, а сторона $BC$ равна 9 см. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

**2.** Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника 13 см. Найдите периметр четырехугольника.

**3.** В четырехугольнике $KLMN$, все стороны которого равны, проведена диагональ $LN$. Найдите градусную меру угла $KLN$, если угол $MLN$ равен 90°.

**4.** В четырехугольнике $ABCD$, две стороны которого $BC$ и $AD$ параллельны, проведена диагональ $AC$. Найдите градусную меру угла $CAD$, если угол $BCA$ равен 30°.

**5.** Диагонали $AC$ и $BD$ четырехугольника $ABCD$ являются диаметрами окружности с центром в точке $O$. Докажите, что прямые, содержащие стороны $BC$ и $AD$, параллельны.

**6.** Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольника, делит боковую сторону на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

**7.** В четырехугольнике $ABCD$ углы при соседних вершинах $A$ и $B$ равны 75° и 105°. Докажите, что прямые, содержащие стороны $BC$ и $AD$, параллельны.

**8.** К окружности с центром в точке $O$ проведены касательные $DC$ ($B$ — точка касания) и $FC$ ($A$ — точка касания). Определите угол $ACB$ четырехугольника $ACBO$, если треугольник $BOA$ — равносторонний.

**9.** Медиана $CM$ и высота $CH$ треугольника $ABC$ делят угол $ACB$ на три равные части. Найдите медиану $CM$ угол, если сторона $AB$ равна 18 см.

## Параллелограмм

### Комментарий для учителя

В пункте вводится определение параллелограмма и доказывается признак параллелограмма. При изучении пункта основное внимание должно быть уделено решению задач на применение определения и признака параллелограмма.

**Текущие результаты** изучения пункта 51. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках параллелограмм;

– *формулировать и объяснять формулировку* определения и признака параллелограмма;

– *решать* задачи с использованием определения и признака параллелограмма.

### Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** При введении определения *параллелограмма* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: *«Четырехугольник ABCD — параллелограмм...»*, то учащиеся должны уметь выделить параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ и записать их в ходе решения задачи или в краткой записи условия. Отработка этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

Как всегда при введении определения следует обратить внимание учащихся на те признаки, в данном случае параллельность противолежащих сторон, которые позволяют из всех четырехугольников выделить конкретный вид, а именно *параллелограммы*.

На закрепление определения *параллелограмма* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу. Первые три задачи направлены на формирование умения *подводить под определение параллелограмма*, а четвертая — на формирование умения *применять определение параллелограмма*.

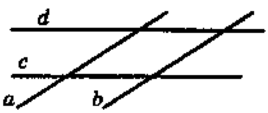



Рис. 13

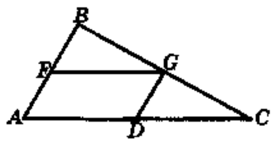



Рис. 14

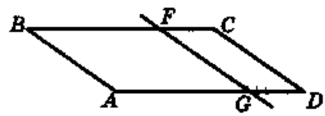



Рис. 15

1. При пересечении двух прямых $a$ и $b$ прямыми $c$ и $d$ образуется четырехугольник $ABCD$. Определите, в каком случае четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $a \parallel b$, $c \nparallel d$; б) $a \parallel b$, $c \parallel d$; в) $a \nparallel b$, $c \nparallel d$ (рис. 13).

2. В треугольнике $ABC$ параллельно сторонам $AB$ и $AC$ проведены прямые $DG$ и $FG$. Определите вид четырехугольника $AFGD$ (рис. 14).

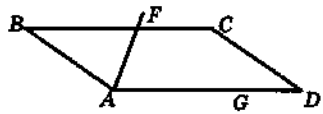



Рис. 16

3. В параллелограмме $ABCD$ параллельно стороне $AB$ проведена прямая $FG$. Определите вид четырехугольника $ABFG$ (рис. 15).

4. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла $A$, которая пересекает сторону $BC$ в точке $F$. Докажите, что треугольник $ABF$ равнобедренный (рис. 16).

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения* параллелограмма *и выполнить задачи 29–32, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–4. Цель их выполнения такая же, а именно: задачи 29–31 направлены на формирование умения подводить под определение параллелограмма, а задача 32 —*

***на формирование умения <u>применять определение</u> параллелограмма. При этом задачи 29–31 выполняются устно с краткой записью ответа, решение задачи 32 полезно оформить полностью. Задача 33 является продолжением задачи 32. Эти две задачи можно предложить выполнить более сильным ученикам при отработке понятия параллелограмма с классом.***

**2°. Сформулировав *признак параллелограмма*, полезно напомнить учащимся, что они уже встречались с понятием «*признак*»: <u>*признак* равнобедренного треугольника</u>, <u>*признак* параллельных прямых</u> и т.д.**

**Доказательство *признака параллелограмма* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся. Если позволяет уровень знаний учащихся, то его можно провести по следующему сценарию. Двум хорошо успевающим ученикам предложить на доске решить задачи:**

**1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$ и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что треугольники $AOB$ и $COD$ равны.**
**2. В четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали, которые пересекаются в точке $O$. Докажите, что стороны $AB$ и $CD$ параллельны, если треугольники $AOB$ и $COD$ равны.**

**После разбора решения задач делается вывод о том, что из равенства треугольников $AOD$ и $COB$ следует параллельность сторон $AD$ и $BC$. Аналогичто доказывается параллельность сторон $AB$ и $CD$. Применив *определение параллелограмма*, делаем вывод: четырехугольник $ABCD$ — *параллелограмм.***

**На закрепление *признака параллелограмма* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовым чертежам.**

**1. В четырехугольнике $ABCD$ точка $O$ — точка пересечения диагоналей. При этом $AC = 12$ см; $BD = 8$ см; $BO = 4$ см; $AO = 6$ см. Определите вид четырехугольника $ABCD$ (рис. 17).**
**2. В треугольнике $ABC$ проведена медиана $BF$. На ее продолжении за точку $F$ отложен отрезок $FD$, равный $BF$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 18).**

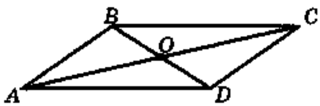



Рис. 17

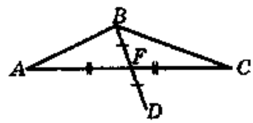



Рис. 18

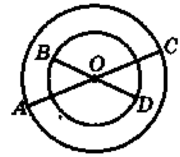



Рис. 19

3. В двух концентрических окружностях проведены диаметры $AC$ и $BD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 19).

4. В треугольнике $ABC$ стороны $AB$ и $BC$ продолжены за точку $B$. На их продолжении отложены отрезки: $BF = AB$ и $BD = CB$. Докажите, что четырехугольник $ADFC$ — параллелограмм (рис. 20).

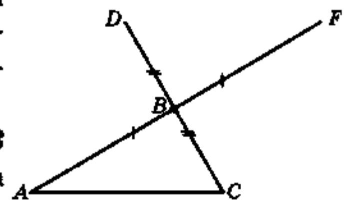



Рис. 20

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачи 34 и 35, а затем записать формулировку* ***признака параллелограмма****. После этого, выполнив на доске чертеж, аналогичный чертежу на рисунке 119 учебника, со ссылками на решения задач 16 и 17 закончить доказательство теоремы. Затем устно решить задачу 36, по тексту тетради разобрать решение задачи 37 и по аналогии решить задачи 38 и 39. Задачи 36–39 из рабочей тетради совпадают с выше приведенными задачами 1–4.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 51, повторить в ходе доказательства признака параллелограмма терминологию, связанную с понятием признак; дома — вопросы 6 и 7 из § 6, задачи 3, 4 и 6 (1) из учебника.

## Дополнительные задачи

**1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ проведена прямая, параллельная боковой стороне $AB$. Она пересекает основание треугольника в точке $F$, а сторону $BC$ в точке $D$. Докажите, что треугольник $DFC$ равнобедренный.

**2.** В окружности с центром $O$ проведены диаметры $AC$ и $BD$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$ и $D$ являются вершинами параллелограмма.

**3.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали равны и пересекаются в точке $O$. Докажите, что треугольник $COD$ равнобедренный.

**4.** В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ $BD$. Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$.

## 52. Свойство диагоналей параллелограмма (1 ч)

### Комментарий для учителя

В пункте 52 рассматривается свойство диагоналей параллелограмма, при этом указывается, что теорема о свойстве диагоналей параллелограмма является обратной к теореме о признаке параллелограмма. Поэтому на этот факт следует обратить внимание. Кроме того, при доказательстве используется искусственный прием, который заключается в построении параллелограмма $ABC_1D$ с заведомо пересекающимися и делящимися пополам диагоналями. После чего, доказывается совпадение построенного параллелограмма $ABC_1D$, у которого диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, с данным параллелограммом $ABCD$.

**Текущие результаты** изучения пункта 52. Учащиеся должны:

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы о свойстве диагоналей параллелограмма;

– *объяснять понятия* прямой и обратной теорем;

– *решать* задачи с использованием свойства диагоналей параллелограмма.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** В доказательстве *свойства диагоналей параллелограмма* используются ссылка на аксиому *параллельных прямых* и определение *параллелограмма*. Поэтому перед началом объяснения формулировки и доказательства теоремы целесообразно повторить с учащимися эти определение и аксиому. При этом полезно в виде рисунков зафиксировать их на доске и сохранять до конца работы над теоремой:

1. аксиому *параллельных прямых* (рис. 21),
2. определение *параллелограмма* (рис. 22),
3. признак параллелограмма (рис. 23).

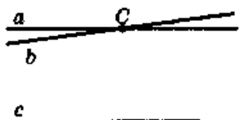



*Рис. 21*

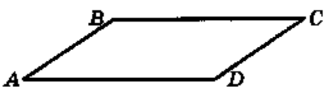



*Рис. 22*

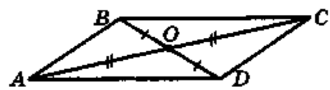



*Рис. 23*

При формулировке указывается, что теорема о свойстве диагоналей параллелограмма является обратной к теореме о признаке параллелограмма. Поэтому полезно в процессе работы над формулировкой обратить на это внимание учащихся и напомнить, какая пара утверждений называется *прямым* и *обратным* утверждениями. Для этого привести примеры: признак равнобедренного треугольника и свойство углов равнобедренного треугольника; признака параллельных прямых и свойства углов при параллельных прямых и секущей.

**2°.** Доказательство *свойства диагоналей параллелограмма* достаточно трудное, поэтому его лучше провести полностью самому учителю. Включение учащихся во фронтальную работу при доказательстве этой теоремы может привести не только к потерям урочного времени, но и к тому, что от учащихся может ускользнуть основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

Изучение теоремы о *свойстве диагоналей параллелограмма* начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 24 а. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что теорема о *свойстве диагоналей параллелограмма* является обратной теоремой *признаку параллелограмма*. Затем, выделив в формулировке теоремы условие (*ABCD* — параллелограмм) и заключение (1. диагонали *AC* и *BD* пересекаются; 2. диагонали *AC* и *BD* точкой пересечения делятся пополам), выполнить краткую запись условия и заключения теоремы.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$AC$ и $BD$ — диагонали параллелограмма.

Доказать: 1. диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются.
2. $AO = OC$ и $BO = OD$.

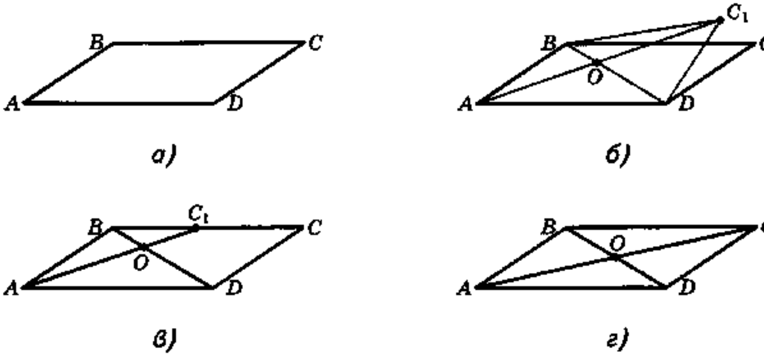



Рис. 24

<u>Доказательство</u>

1. В данном параллелограмме $ABCD$ проведем диагональ $BD$. Отметим середину диагонали — точку $O$. Соединим вершину $A$ с точкой $O$. На продолжении отрезка $AO$ отложим отрезок $OC_1$, равный отрезку $AO$. Таким образом, построили четырехугольник $ABC_1D$, в котором диагонали $AC_1$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (рис. 24 б).

2. Диагонали $AC_1$ и $BD$ четырехугольника $ABC_1D$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, по *признаку параллелограмма*: четырехугольник $ABC_1D$ — параллелограмм.

3. Таким образом, два параллелограмма $ABCD$ и $ABC_1D$ имеют общие стороны $AB$ и $AD$ и диагональ $BD$. По *определению параллелограмма*: противолежащие стороны параллельны, значит, в параллелограмме $ABCD$ сторона $BC$ параллельна стороне $AD$, а в параллелограмме $ABC_1D$ сторона $BC_1$ параллельна стороне $AD$. По *аксиоме параллельных прямых*: через точку $B$ можно провести только одну прямую, параллельную $AD$, следовательно, прямая $BC_1$ совпадает с прямой $BC$ (рис. 24 в).

4. Аналогично доказывается, что прямая $DC_1$ совпадает с прямой $DC$. Значит, точка $C_1$ совпадает с точкой $C$, параллелограмм $ABC_1D$ совпадает с параллелограммом $ABCD$. Значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

**3°.** Для того чтобы учащиеся лучше запомнили доказательство, усвоили его основные идеи, полезно сделать краткую запись его на доске:

1. Построение: точка $O$ ($BO = OD$), отрезки $AO$ и $OC_1$, $AO = OC_1$.
2. $ABC_1D$ — параллелограмм по признаку параллелограмма.
3. В параллелограмме $ABCD$: $BC \parallel AD$, $DC \parallel AB$.
4. В параллелограмме $ABC_1D$: $BC_1 \parallel AD$, $DC_1 \parallel AB$.
5. $BC \parallel AD$ и $BC_1 \parallel AD$, по *аксиоме параллельных прямых*: $BC_1$ совпадает с прямой $BC$.
6. $DC \parallel AB$ и $DC_1 \parallel AB$, по *аксиоме параллельных прямых*: $DC_1$ совпадает с прямой $DC$ .
7. Параллелограмм $ABCD$ совпадает с параллелограммом $ABC_1D$.
8. <u>Вывод:</u> В параллелограмме $ABCD$: $AO = OC$, $BO = OD$.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы о **свойстве диагоналей параллелограмма**. Так как теорема о свойстве диагоналей параллелограмма является обратной к признаку параллелограмма, рекомендуется записать формулировку признака параллелограмма, а затем сделать краткую запись условия прямой и обратной теорем. В тетради дана краткая запись доказательства теоремы о **свойстве диагоналей параллелограмма**, которая может быть использована при работе над доказательством.*

**4°.** Для закрепления теоремы можно предложить учащимся устно выполнить следующие задания по готовому чертежу:

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD$ равна 12 см, точка $O$ — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Чему равен отрезок $DO$ (рис. 25)?

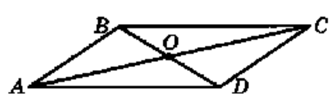


Рис. 25

2. Точка $O$ является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Чему равна диагональ $AC$, если отрезок $AO = 9$ см (рис. 25)?
3. Сторона $AD$ параллелограмма $ABCD$ равна 9 см, а его диагонали равны 14 см и 10 см. Точка $O$ является точкой пересечения диагоналей. Чему равен периметр $\Delta AOD$ (рис. 25)?
4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали равны, точка $O$ — точка пересечения диагоналей. Докажите, что $\Delta AOD$ — равнобедренный (рис. 25).

После решения устных задач по готовому чертежу полезно по тексту учебника разобрать решение задачи **6**.

> *Устно решить задачи 40–43 из рабочей тетради. Решение задачи 43 полезно оформить полностью. Задачи рабочей тетради 40–43 полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–4. Затем по тексту учебника разобрать решение задачи 6 из § 6 и по аналогии решить задачу 44 из рабочей тетради. Если на уроке не хватит времени, задачу 44 можно предложить для домашнего задания.*

### Примерное планирование изучения материала

На уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пункта **52**, по тексту учебника разобрать решение задачи **6**; повторить пункт **8** из **§ 1**, при этом обратить внимание на задачу **30**; <u>дома</u> — вопрос **8** из **§ 6**, задача **7** из **§ 6** учебника.

### Дополнительная задача

**1.** Через точку $O$ пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону $AD$ в точке $K$, а сторону $CB$ в точке $L$. Докажите, что $AK = CL$.

## Свойство противолежащих сторон и углов параллелограмма

### Комментарий для учителя

В пункте 53 рассматриваются свойства сторон и углов параллелограмма. Доказательство теоремы о свойстве противолежащих сторон и углов параллелограмма не должно вызывать затруднений, так как аналогичные рассуждения применялись при решении задач в пунктах 50 и 51.

Традиционный признак параллелограмма (две противолежащие стороны параллельны и равны) формулируется и доказывается в задаче 18.

При изучении пункта основное внимание должно быть уделено решению задач, для чего отводится второй урок из рекомендованных к данному параграфу.

**Текущие результаты** изучения пункта 52. Учащиеся должны:

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы о свойстве противолежащих сторон и углов параллелограмма;

– *решать* задачи с использованием свойства диагоналей параллелограмма, свойств противолежащих сторон и углов параллелограмма, признаков параллелограмма по диагоналям и противолежащим сторонам.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Доказательство теоремы о *свойстве противолежащих сторон и углов параллелограмма* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся. Если позволяет уровень знаний учащихся, то его можно провести по тому же сценарию, что и доказательство *признака параллелограмма*. Двум хорошо успевающим ученикам предложить на доске решить задачи:

> 1. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали, которые пересекаются в точке $O$. Докажите, что треугольники $AOB$ и $COD$ равны.
> 2. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ $BD$. Докажите, что треугольники $ABD$ и $CDB$ равны.

После разбора решения задач делается вывод: из равенства треугольников $AOB$ и $COD$ следует равенство сторон $AB$ и $CD$, а из равенства треугольников $ABD$ и $CDB$ следует равенство углов $DAB$ и $BCD$.

Аналогично доказывается равенство сторон $AD$ и $BC$ и равенство углов $ABC$ и $CDA$.

**2°.** На закрепление *свойства противолежащих сторон параллелограмма* можно предложить учащимся устные задания.

> 1. Стороны $AB$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ равны 9 см и 6 см. Чему равны стороны $CD$ и $AD$?
> 2. Стороны $AB$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 9 см и 6 см. Чему равен периметр параллелограмма $ABCD$?
> 3. Периметр параллелограмма равен 28 см, одна из сторон параллелограмма равна 9 см. Определите все стороны параллелограмма.
> 4. Периметр параллелограмма равен 38 см. Чему равна сумма двух соседних сторон параллелограмма?

**3°**. На закрепление *свойства противолежащих углов параллелограмма* можно предложить учащимся следующие устные задания.

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 43°$. Найдите градусную меру остальных углов параллелограмма.
2. В параллелограмме сумма двух противоположных углов равна 132°. Найдите градусную меру каждого из этих углов.
3. В параллелограмме сумма двух углов равна 120°. Могут ли эти углы прилежать к одной стороне параллелограмма?
4. Известно, что в параллелограмме один угол на 12° меньше другого. Могут ли эти углы быть противоположными?

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачи 45 и 46, а затем записать формулировку теоремы о* ***свойствах противолежащих сторон и углов параллелограмма****. После этого, со ссылками на решения задач 45 и 46, сделать вывод о равенстве* ***противолежащих сторон и углов параллелограмма****. После чего на закрепление* ***свойства противолежащих сторон и углов параллелограмма*** *устно решить задачи 47–54.*

**4°**. В тексте учебника приведено решение задачи 18, в условии которой дана формулировка еще одного признака параллелограмма: «*Если у четырехугольника две противолежащие стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом*». Так как решение задачи 18 достаточно трудное, то его лучше провести полностью учителю и не требовать воспроизведения от учащихся. В рассматриваемом решении используется тот же метод, что и при доказательстве теоремы о *свойстве диагоналей параллелограмма*. Сначала строится параллелограмм $ABC_1D$. Значит, стороны $AB$ и $C_1D$ равны, по условию в четырехугольнике $ABCD$ стороны $AB$ и $CD$ также равны. По построению четырехугольник $ABCD$ и параллелограмм $ABC_1D$ имеет общие вершины $A$, $B$ и $D$. Таким образом, на луче $DC$ от точки $D$ отложены два равных отрезка $DC$ и $DC_1$. По *аксиоме откладывания отрезков*: на любой полупрямой от ее начала можно отложить отрезок заданной длины и только один. Следовательно, точка $C_1$ совпадает с точкой $C$. Отсюда, параллелограмм $ABC_1D$ совпадает с четырехугольником $ABCD$. Значит, данный четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

Для того чтобы учащиеся лучше поняли решение задачи, полезно сделать его краткую запись на доске:

1. Построение: прямая $b$, точка $C_1 \in DC$.
2. $BC_1 \parallel AD$ по построению $DC_1 \parallel AB$ по условию ($DC \parallel AB$).
3. $ABC_1D$ — параллелограмм по *определению параллелограмма*.
4. В четырехугольнике $ABCD$: $DC = AB$.
5. В параллелограмме $ABC_1D$: $DC_1 = AB$.
6. $DC = AB$ и $DC_1 = AB$, по *аксиоме откладывания отрезков*: $C_1$ совпадает с $C$.
7. Четырехугольник $ABCD$ совпадает с параллелограммом $ABC_1D$.
8. Вывод: В параллелограмме $ABCD$: $AO = OC$, $BO = OD$.

Признак параллелограмма, доказанный при решении задачи 18, может применяться при решении задач, поэтому целесообразно закрепить его в ходе решения задачи 2 из дополнительных задач.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* ***признака параллелограмма****, сформулированного в задаче 18, и закрепить его в ходе решения задачи 55. В тетради дана краткая запись доказательства теоремы о* ***признаке параллелограмма****, которая может быть использована при работе над доказательством.*

5°. На втором уроке в классе рекомендуется провести обобщение знаний учащихся по теме «*Параллелограмм*» в ходе решения задач. При этом основное внимание должно быть уделено формированию у учащихся умений применять признаки и свойства параллелограмма. Другими словами, если по ходу решения задачи нужно доказать, что четырехугольник является параллелограммом, то с необходимостью должно выполняться одно из условий:

1. противолежащие стороны четырехугольника попарно параллельны;
2. диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
3. две противолежащие стороны четырехугольника параллельны и равны.

Если в условии задачи дан параллелограмм, то это значит, что при ее решении можно использовать его свойства:

1. противолежащие стороны параллельны;
2. противолежащие стороны равны;
3. противолежащие углы равны;
4. диагонали пересекаются и делятся в точке пересечения пополам.

> *В рабочей тетради можно предложить учащимся выполнить задания 56 и 57, которые позволят на данном этапе систематизировать знания учащихся о параллелограмме, а в дальнейшем у школьников будет хороший конспект по теме* ***«Параллелограмм»****, который, несомненно, поможет при изучении признаков и свойств других четырехугольников. Задача 58 повышенного уровня сложности, ее можно предложить для решения одному из сильных учеников и оценить решение.*

## Примерное планирование изучения материала

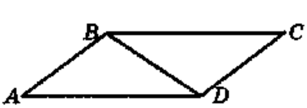
На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 53, решить задачу 18; дома — вопрос 9 из § 6, задачи 10, 13, 15 (1), 16 (1) и 17 из § 6 учебника.

На втором уроке в классе — самостоятельная работа, провести обобщение знаний учащихся по теме *«Параллелограмм»* в ходе решения задач 14, 19, 21, 22(1) и 23(2); дома — задачи 15 (2), 16 (2), 20, 22(2) и 23(1).

## Самостоятельная работа по теме: «Параллелограмм»

Самостоятельная работа планируется на 20 мин. Провести ее рекомендуется после повторение материала темы *«Параллелограмм»* в ходе решения задач.

*1-й вариант*

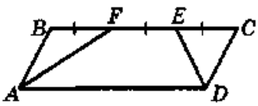



**1.** Диагональ $BD$ параллелограмма $ABCD$ равна 8 см. Периметр треугольника $ABD$ равен 23 см. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

*Ответ:* 1. 46 см; 2. 31 см; 3. 32 см; 4. 30 см.


**2.** Высота $BH$ параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный прямоугольный треугольник $AHB$. Найдите градусную меру угла $ADC$.

*Ответ:* ____________________



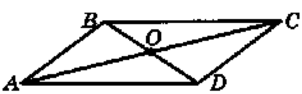

**3.** В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы углов $A$ и $D$, разбившие сторону $BC$ на три равных отрезка: $BF$, $FE$ и $EC$. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88 см.

*Ответ:* 1. 22 см; 2. 44 см; 3. 11 см; 4. 33 см.

**4.** Стороны $AD$ и $BC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, а стороны $AB$ и $CD$ параллельны. Найдите сторону $CD$, если стороны $AB$ и $BC$ равны 7 см и 4 см, соответственно.

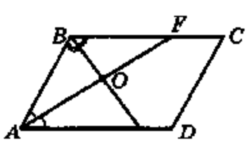
*Ответ:* 1. 4 см; 2. 7 см; 3. 11см;
4. *Определить невозможно.*

*2-й вариант*



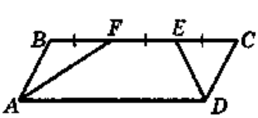

**1.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ соответственно равны 11 см и 8 см. Найдите периметр треугольника $ABC$, если периметр треугольника $BCD$ равен 23 см.

*Ответ:* 1. 19 см; 2. 30 см; 3. 23 см; 4. 26 см.




**2.** Найдите угол между биссектрисами углов $A$ и $B$ параллелограмма $ABCD$.

*Ответ:* ____________________




**3.** В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы углов $A$ и $D$, разбившие сторону $BC$ на три равных отрезка: $BF$, $FE$ и $EC$. Найдите периметр параллелограмма, если сторона $BC$ равна 24 см.

*Ответ:* 1. 32 см; 2. 64 см; 3. 48 см; 4. 16 см.

**4.** Углы $ABC$ и $ADC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, а точка пресечения диагоналей — точка $O$ делит диагональ $AC$ пополам. Найдите сторону $AD$, если стороны $AB$ и $BC$ равны 4 см и 7 см, соответственно.

*Ответ:* 1. 4 см; 2. 7 см; 3. 11 см;
4. *Определить невозможно.*

## Указания к задачам

Задачи 8, 9, 11 и 12 фактически дублируют задачи, предлагаемые в методических рекомендациях на закрепление *свойства противолежащих сторон и углов параллелограмма*, поэтому их можно пропустить или использовать для дифференцированного задания на дом.

Перед решением задачи 19 полезно вспомнить, что при определении параллелограмма была решена задача: *В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный* (рис. 10).

> *В рабочей тетради достаточно предложить учащимся посмотреть решение задачи 33.*

Важным моментом при решении задачи 21 является доказательство равенства диагонали $BD$ и стороны $AB$ параллелограмма $ABCD$. Доказательство проводится с опорой на свойство медианы равнобедренного треугольника.

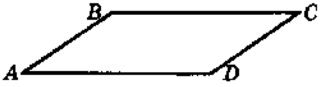



Рис. 26

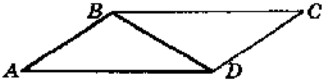



Рис. 27

Задачи на построение 22 и 23 полезно начать с анализа. Сначала изображается параллелограмм (рис. 26), затем необходимо выделить заданные элементы более жирным изображением или цветом, и, наконец, определить схему построения.

Задача на построение 22 1). Из рисунка 27 видно, что сначала надо построить треугольник $ABD$, сторонами которого являются данные отрезки: две стороны параллелограмма и его диагональ. Затем, в силу определения параллелограмма, через точку $B$ провести прямую параллельную стороне $AD$, а через точку $D$ провести прямую, параллельную стороне $AB$. Точка пересечения прямых, параллельных сторонам $AB$ и $AD$ треугольника $ABD$, и будет четвертой вершиной искомого параллелограмма. Затем следует исследовать, что построенный параллелограмм — искомый и единственный. Искомый по построению, а единственность определяется единственностью построения треугольника по трем сторонам.

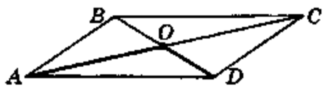


Рис. 28

Задача на построение 22 2). Из рисунка 28 видно, что сначала надо построить треугольник $AOD$, сторонами которого являются данные отрезки: сторона параллелограмма и две половинки его диагоналей. Затем, в силу признака параллелограмма, на луче $AO$ от точки $O$ отложить отрезок $OC$, равный отрезку $AO$, а на луче $DO$ от точки $O$ отложить отрезок $OB$, равный отрезку $DO$. Соединить последовательно точки $A$, $B$ и $D$. Затем следует исследовать, что построенный параллелограмм — искомый и единственный. Единственность определяется единственностью построения треугольника по трем сторонам.

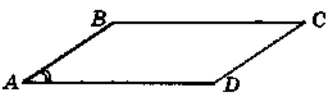


Рис. 29

Задача на построение 23 1). Из рисунка 29 видно, что сначала надо построить треугольник $ABD$, у которого известны две стороны (стороны параллелограмма) и угол между ними (угол параллелограмма). Затем, в силу определения параллелограмма, через точку $B$ провести прямую параллельную стороне $AD$, а через точку $D$ провести прямую, параллельную стороне $AB$. Точка пересечения прямых, параллельных сторонам $AB$ и $AD$ треугольника $ABD$, и будет четвертой вершиной искомого параллелограмма. Затем следует исследовать, что построенный параллелограмм — искомый и единственный. Единственность определяется единственностью построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

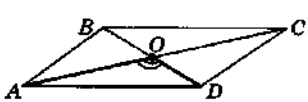


Рис. 30

Задача на построение 23 2). Из рисунка 30 видно, что сначала надо построить треугольник $AOD$, у которого известны две стороны (две половинки его диагоналей параллелограмма) и угол между ними (угол между диагоналями параллелограмма). Затем, в силу признака параллелограмма, на луче $AO$ от точки $O$ отложить отрезок $OC$, равный отрезку $AO$, а на луче $DO$ от точки $O$ отложить отрезок $OB$, равный отрезку $DO$. Соединить последовательно точки $A$, $B$ и $D$. Затем следует исследовать, что построенный параллелограмм — искомый и единственный. Единственность определяется единственностью построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

### Дополнительные задачи

**1.** В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины $B$ на сторону $AD$, делит ее пополам. Докажите, что: а) $\Delta ABD$ — равнобедренный; б) $\Delta BDC$ — равнобедренный.

**2.** На сторонах $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки $AE$ и $FC$. Докажите, что четырехугольник $AFCE$ — параллелограмм.

## Прямоугольник

### Комментарий для учителя

В пункте 54 рассматриваются прямоугольник, являющийся частными видом параллелограмма: вводится его определение и доказывается теорема о *свойстве диагоналей прямоугольника*. Кроме того, три признака прямоугольника сформулированы в задачах 24, 25 и 25. Знание этих признаков не является обязательным, однако, решить эти задачи рекомендуется на уроке и ссылки на них при решении задач вполне допустимы. Поскольку прямоугольник является частными видом параллелограмма, то обязательно надо обратить внимание учащихся на то, что прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

**Текущие результаты изучения пункта 54. Учащиеся должны:**

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках прямоугольник;

– *формулировать* определение прямоугольника;

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы о свойствах диагоналей прямоугольника;

– *доказывать* теорему *о свойстве диагоналей прямоугольника*;

– *формулировать и объяснять формулировки* теорем о свойствах *прямоугольника*, как частного вида параллелограмма;

– *решать* задачи с использованием свойства диагоналей прямоугольника, а также свойства диагоналей параллелограмма, свойств противолежащих сторон и углов параллелограмма, признака прямоугольника (задача 25) и признаков параллелограмма по диагоналям и противолежащим сторонам.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** При введении определения *прямоугольника* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на ее понимание. Во-первых, учащиеся должны понимать, что *прямоугольник* — это параллелограмм, и поэтому все свойства параллелограмма справедливы и для *прямоугольника*:

– противоположные стороны прямоугольника равны и параллельны;

– диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Во-вторых, у прямоугольника все углы — прямые.

Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник* (*параллелограмм*) *ABCD — прямоугольник...*», то учащиеся должны уметь выделить параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, равные стороны: $AB = CD$ и $BC = AD$, прямые углы: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, перпендикулярные стороны (записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия). Отработка этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

На закрепление определения *прямоугольника* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу. Первая задача направлена на формирование умения *применять определение прямоугольника*, а следующие две — на формирование умения *подводить под определение прямоугольника*.

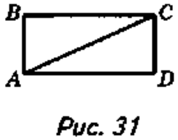



*Рис. 31*

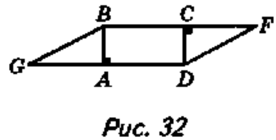



*Рис. 32*

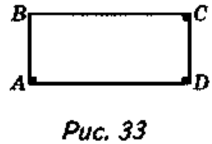



*Рис. 33*

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ $AC$ образует со стороной $AD$ угол, равный 37°. Найдите градусную меру $\angle ACD$ (рис. 31).
2. В параллелограмме из вершин двух углов на противоположные стороны опущены перпендикуляры. Докажите, что полученный четырехугольник — прямоугольник (рис. 32).

3. Докажите, что, если в четырехугольнике три угла прямые, то он является прямоугольником (рис. 33).

При доказательстве утверждения задачи 3 следует напомнить учащимся следствия из признака параллельности прямых: «*две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны*» и из свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей: «*если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой*».

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения* ***прямоугольника*** *и свойства прямоугольника, как частного вида параллелограмма. Затем выполнить задачи 59–61, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–3. Цель их выполнения: задача 59 — на формирование умения* ***применять определение прямоугольника****, а задачи 60 и 61 направлены на формирование умения* ***подводить под определение прямоугольника****. При этом задача 59 выполняются устно с краткой записью ответа, решение задачи 60 следует предложить учащимся разобрать самостоятельно по тексту тетради, а решение задачи 61 полезно оформить полностью по предложенной схеме.*

**2°**. Доказательство теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника* достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся, выполнив на доске рисунок и краткую запись условия. Или можно сформулировать теорему в виде задачи и предложить выполнить ее решение хорошо успевающему ученику.

На прямое применение теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника* можно предложить учащимся устно по готовому чертежу (рис. 34) выполнить следующие упражнения.

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $\Delta AOB$ — равнобедренный.
2. Меньшая сторона прямоугольника равна 6 см. Найдите длины диагоналей, если они пересекаются под углом 60°.

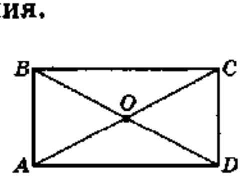


*Рис. 34*

3. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что отрезок $BO$ является медианой $\Delta ABC$.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о* ***свойстве диагоналей прямоугольника*** *и выполнить задачи 63÷65, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–3. После выполнения задачи 65 можно предложить учащимся решить задачу 66, при решении которой используется результат, полученный при решении задачи 65.*

Затем можно предложить учащимся сформулировать утверждение, обратное утверждению теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника*. Это утверждение сформулировано в задаче 26 учебника (§ 6) и оно является признаком *прямоугольника*, которым можно пользоваться при решении задач. Его доказательство можно провести по рисунку 34. Для этого надо рассмотреть треугольники $BAD$ и $CDA$ и доказать их равенство по трем сторонам (рис. 34). Откуда следует вывод о равенстве внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей и подведение под определение *прямоугольника*. Таким образом, будет доказан еще признак прямоугольника.

> *В рабочей тетради предложить учащимся сформулировать утверждение, обратное утверждению теоремы о* ***свойстве диагоналей прямоугольника*** *и записать его формулировку. Затем по приведенной схеме провести его доказательство и выполнить задачу 67.*

**3°**. На втором уроке полезно провести самостоятельную работу, опрос учащихся по теме и решение задач. В условиях задач 24 и 25 даны формулировки двух признаков *прямоугольника*:

*«Если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником».*

*«Если у параллелограмма один угол прямой, то он является прямоугольником».*

Знание этих признаков полезно и ссылки на них при решении задач вполне уместны.

Поскольку решение задачи 24 дано в тексте учебника, и оно достаточно простое, то можно предложить учащимся разобрать его самостоятельно. После чего решить устно задачу 25, фактически повторяя и закрепляя решение задачи 24. Следует обратить внимание учащихся на то, что при решении обеих задач применяется свойство параллелограмма: *противоположные стороны параллельны*.

> *В рабочей тетради задачи 68 и 69 можно использовать на закрепление признаков, сформулированных в задачах 24 и 25.*

После проверки задачи 28 из домашнего задания можно порекомендовать выполнить задачи 2–5 из дополнительных задач. При решении всех этих задач следует обратить внимание учащихся на тот факт, что *биссектриса угла прямоугольника отсекает от него прямоугольный равнобедренный треугольник.* Это свойство биссектрисы угла прямоугольника полезно при решении других задач.

> *В рабочей тетради задачи 2–5 из дополнительных задач даны под номерами 72–75, а задача 31 из учебника (§ 6) под номером 71.*

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пункта 54, решить задачу 26; <u>дома</u> — вопросы 10 и 11 из § 6, задачи 27–29.

На втором уроке <u>в классе</u> — провести самостоятельную работу, решить задачи 24, 25 и 31 из учебника; <u>дома</u> — задачи 30 и 32.

## Самостоятельная работа по теме: «Прямоугольник»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин. Провести ее рекомендуется после повторения материала темы *«Прямоугольник»* в ходе решения задач. Два задания являются заданиями со свободным ответом, третье — с выбором ответа.

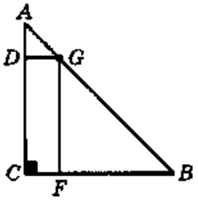
*1-й вариант*

**1.** Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Периметр треугольника $AOD$ равен 18 см, а сторона $CD$ равна 6 см. Найдите периметр треугольника $ABD$.

*Ответ:* ____________________

**2.** Меньшая сторона прямоугольника равна 10 см. Угол между его диагоналями равен 60°. Вычислите длину диагонали прямоугольника.

*Ответ:* ____________________




**3.** В прямоугольном равнобедренном треугольнике $ABC$ ($\angle C$ — прямой) через точку $G$, лежащую на гипотенузе, проведены прямые $GD$ и $GF$, параллельные катетам $BC$ и $AC$ соответственно. Найдите периметр прямоугольника $CFGD$, если катет треугольника $ABC$ равен 12 см.

*Ответ:* 1. 12 см; 2. 6 см; 3. 24 см; 4. 18 см.

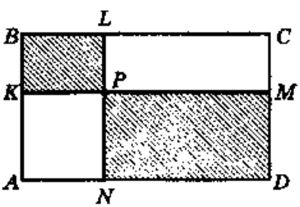
*2-й вариант*

**1.** Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Периметр треугольника $ACD$ равен 30 см, а периметр треугольника $AOD$ равен 18 см. Найдите периметр треугольника $COD$, если диагональ прямоугольника равна 13 см.

*Ответ:* ____________________

**2.** Диагональ прямоугольника равна 10 см. Угол между его диагоналями равен 60°. Вычислите длину меньшей стороны прямоугольника.

*Ответ:* ____________________




**3.** В прямоугольнике $ABCD$ через точку $P$ проведены прямая $KM$, параллельная сторонам $AD$ и $BC$, и прямая $LN$, параллельная сторонам $AB$ и $CD$. Периметр прямоугольника $KBLP$ равен 8 см, а периметр прямоугольника $NPMD$ равен 18 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

*Ответ:* 1. 10 см; 2. 26 см; 3. 8 см; 4. 18 см.

## Указания к задачам

Задачи 24 и 25 направлены на формирование у учащихся умения *подводить под определение прямоугольника*. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что для *подведения* данной фигуры под *определение прямоугольника* необходимо проверить выполнение двух условий: данная фигура должна быть параллелограммом и у нее все углы должны быть прямые.

### Дополнительные задачи

**1.** В параллелограмме $KLMN$ каждый из углов $LKM$ и $MNL$ равен 57°. Определите, является ли параллелограмм $KLMN$ прямоугольником.

**2.** Стороны прямоугольника равны 11 см и 4 см. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найдите длины этих частей.

**3.** Стороны прямоугольника равны 5 см и 4 см. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найдите длины этих частей.

**4.** Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектрисы его углов $A$ и $B$ делят сторону $CD$ на три равные части, длина каждой — 4 см.

**5.** В условии задачи № 4 длины сторон измените так, чтобы длина среднего отрезка равнялась нулю, запишите новое условие задачи.

**6.** В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

## Ромб, квадрат

### Комментарий для учителя

В пунктах 55 и 56 рассматриваются ромб и квадрат, являющимися частными видами параллелограмма: вводятся их определения и доказывается теорема о свойствах диагоналей ромба. Три признака ромба сформулированы в задачах 33, 34 и 36. Знание этих признаков не является обязательным, однако, решить эти задачи рекомендуется на уроке и ссылки на них при решении задач вполне допустимы.

**Текущие результаты** изучения пунктов 55 и 56. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках ромб и квадрат;

– *формулировать* определения ромба и квадрата;

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы о свойствах диагоналей ромба;

– доказывать теорему о *свойстве диагоналей ромба*;

– *формулировать и объяснять формулировки* теорем о свойствах *ромба* и *квадрата*, как частных видов параллелограмма;

– *решать* задачи с использованием определений ромба и квадрата; свойства диагоналей ромба, а также свойства диагоналей параллелограмма, свойств противолежащих сторон и углов параллелограмма, признак ромба (задачи 33 и 34).

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** При введении определения *ромба* основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения. Во-первых, учащиеся должны понимать, что *ромб* — это параллелограмм и поэтому все свойства параллелограмма справедливы и для *ромба*:

– противоположные углы ромба равны;

– диагонали ромба пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Во-вторых, у *ромба все стороны равны*.

Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник* (*параллелограмм*) $ABCD$ — *ромб* — ...», то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, равные углы: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, равенство сторон: $AB = BC = CD = AD$ (рис. 35), свойство диагоналей $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 36).

На закрепление *определения и свойств ромба* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу.

1. Периметр ромба $ABCD$ равен 56 см. Найдите его сторону (рис. 35).
2. Один из углов ромба $ABCD$ равен 72°. Найдите углы ромба (рис. 35).

3. Диагонали ромба $ABCD$ равны: $AC = 16$ см и $BD = 12$ см. Найдите отрезки $OD$ и $OC$ (рис. 36).
4. В ромбе $ABCD$ проведена диагональ $AC$. Докажите, что треугольник $ABC$ — равнобедренный (рис. 31).

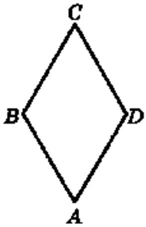



*Рис. 35*

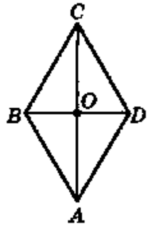



*Рис. 36*

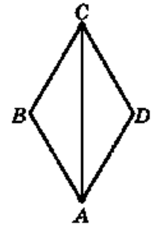



*Рис. 37*

***В рабочей тетради следует записать определение ромба и выполнить задачи 76 и 77, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–4.***

**2°.** Изучение теоремы о *свойствах диагоналей ромба* (теорема 6.5) начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 35. Затем, выделив в формулировке теоремы условие ($ABCD$ — ромб; $AC$ и $BD$ — диагонали) и заключение (1. диагонали $AC$ и $BD$ перпендикулярны; 2. каждая диагональ является биссектрисой соответствующего угла ромба), следует обратить внимание учащихся на тот факт, что в теореме доказываются два свойства диагоналей ромба, т.е. доказываются две теоремы. Выполним краткую запись условия и заключения каждой из этих теорем.

Дано: $ABCD$ — ромб;
$AC$ и $BD$ — диагонали ромба.

---

Доказать: $AC \perp BD$.

Дано: $ABCD$ — ромб;
$AC$ и $BD$ — диагонали ромба.

---

Доказать: $BD$ — биссектриса углов $B$ и $D$;
$AC$ — биссектриса углов $C$ и $A$.

Доказательство теоремы о *свойствах диагоналей ромба* достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся.

**3°.** На прямое применение теоремы о *свойствах диагоналей ромба* можно предложить учащимся устно по готовому чертежу выполнить следующие упражнения:

1. В ромбе $ABCD$ угол $BAD$ равен 50°. Найдите углы треугольника $ABC$ (рис. 37).
2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке $O$, угол $BAD$ равен 46°. Найдите углы треугольника $AOD$ (рис. 36).

*В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о* ***свойствах диагоналей ромба*** *и выполнить упражнения 59 и 60, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1 и 2.*

Затем можно предложить учащимся сформулировать утверждения, обратные утверждению теоремы о *свойствах диагоналей ромба*. Эти утверждения сформулированы в задачах 33 и 34 учебника и являются признаками ромба:

«*Если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом*».

«*Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом*».

Поскольку решение задачи 33 дано в тексте учебника, и оно достаточно простое, то можно предложить учащимся разобрать его самостоятельно. После чего решить устно по готовому чертежу (рис. 36) задачу 34, фактически повторяя и закрепляя решение задачи 33. Следует обратить внимание учащихся, что при решении обеих задач применяется свойство параллелограмма: *противоположные стороны равны*. Откуда следует вывод о равенстве сторон параллелограмма и *подведение под определение ромба*.

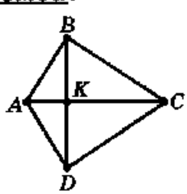


Рис. 38

Полезно после решения задачи 33 уточнить условие «*если у параллелограмма диагонали перпендикулярны…*» и привести контрпример: «*если у четырехугольника диагонали перпендикулярны…*» (рис. 38).

Аналогично, после решения задачи 34 уточнить условие «*если у параллелограмма диагональ является биссектрисой…*» и привести контрпример: «*если у четырехугольника диагональ является биссектрисой …*». На рисунке 38 диагональ $AC$ диагональ является биссектрисой углов $BAD$ и $BCD$.

В задаче № 36 (учебник § 6) сформулирован еще один признак ромба: «*Четырехугольник, у которого все стороны равны, явля-*

*ется ромбом»*. Используйте этот признак при решении следующей задачи.

Выше сформулированными признаками полезно пользоваться при решении задач.

> *В рабочей тетради задачи 33 и 34 даны под номерами 80 и 81, а в задаче 82 учащимся предлагается привести контрпример. На закрепление материала пункта 55 предлагаются задачи 83–85, которые соответствуют задачам 1–3 из дополнительных задач. Задача 83 может быть решена с применением признака ромба: **«Четырехугольник, у которого все стороны равны — является ромбом»**. Из доказанного в задаче №85 следует: **«В ромб можно вписать окружность»**.*

**4°**. При введении определения *квадрата* учащиеся должны понимать, что *квадрат* является одновременно и прямоугольником и ромбом по определению. А значит все свойства параллелограмма и ромба справедливы для квадрата:

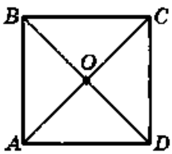



*Рис. 39*

– все углы квадрата прямые;

– диагонали квадрата равны;

– диагонали квадрата, взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;

– диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

Другими словами, если в условии задан *квадрат* $ABCD$, то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия равные стороны: $AB = BC = CD = AD$, параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, прямые углы: $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$, свойства диагоналей: $AC = BD$ и $AO = OC$ и $BO = OD$. На закрепление *определения и свойств квадрата* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу:

> 1. Периметр квадрата равен 28 см. Найдите его сторону.
> 2. В квадрате $ABCD$ проведена диагональ $BD$ (рис. 40). Определите:
>    1. вид треугольника $ABD$.
>    2. углы треугольника $ABD$.

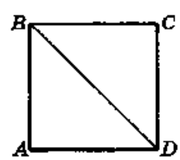



*Рис. 40*

3. В квадрате $ABCD$ проведены диагонали $BD$ и $AC$ (рис. 39).
   1. Определите вид треугольника $AOD$.
   2. Определите углы $\Delta AOD$.
   3. Найдите диагональ $BD$, если диагональ $AC = 6$ см.

***В рабочей тетради следует записать определение квадрата и выполнить задачи 86–88, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–3. В задаче 89 сформулирован и доказан еще один признак квадрата. Его полезно разобрать после решения задачи 40. Задачи 90–92 являются задачами повышенного уровня сложности. Их можно использовать для дифференцированной работы.***

## Примерное планирование изучения материала

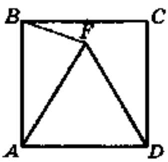
На первом уроке: <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 55 и 56, решить задачи 33, 34 и 40; <u>дома</u> — вопросы 12–14 из § 6, задачи 35, 37 и 41.

На втором уроке: <u>в классе</u> — провести самостоятельную работу, решить задачи 36, 42, 43; дома — задачи 44, 46.

## Самостоятельная работа по теме: «Ромб, квадрат»

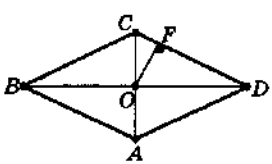
Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

*1-й вариант*




**1.** Внутри квадрата отмечена такая точка $F$, что треугольник $AFD$ — равносторонний. Найдите угол $FBC$.

*Ответ:* ______________________

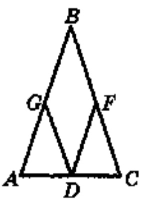



**2.** Сторона ромба равна 10, а один из его углов равен 30°. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

*Ответ:* 1. 5 см; 2. 2,5 см; 3. 20 см; 4. 10 см.

**3.** В параллелограмме $ABCD$ углы $BAC$ и $CDB$ равны. Определите вид параллелограмма $ABCD$, если стороны $AB$ и $AD$ равны.

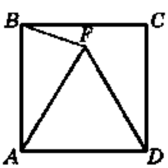
1. прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить нельзя.




**4.** В равнобедренный треугольник $ABC$ вписан ромб $GBFD$, имеющий с ним общий угол $B$. Найдите периметр ромба, если боковая сторона треугольника равен 16 см.

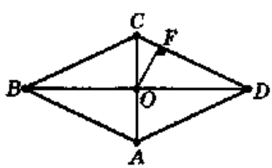
*Ответ:* ________________________

*2-й вариант*




**1.** Внутри квадрата отмечена такая точка $F$, что треугольник $AFD$ равносторонний. Найдите угол $AFB$.

*Ответ:* ________________________

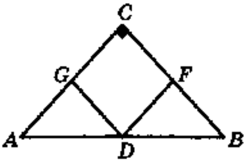



**2.** В ромб $ABCD$ с острым углом 30°, расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба $CD$ равно 3 см. Найдите периметр ромба.

*Ответ:* 1. 6 см; 2. 48 см; 3. 12 см; 4. 24 см.

**3.** Диагональ $BD$ параллелограмма $ABCD$ делит тупой угол $B$ пополам. Определите вид параллелограмма $ABCD$.

1. прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить нельзя.




**4.** В равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ вписан квадрат $GCFD$, имеющий с ним общий прямой угол $C$. Найдите периметр квадрата, если катет треугольника равен 9 см.

*Ответ:* ____________________________

## Указания к задачам

Задачи 33, 34 и 36 направлены на формирование у учащихся умения *подводить под определение ромба*, а задачи 40 и 42 — *под определение квадрата*. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что для *подведения под определение ромба* необходимо проверить выполнение двух условий: данный четырехугольник должен быть *параллелограммом* и у него все стороны равны. При *подведении под определение квадрата* необходимо, чтобы данный четырехугольник был *прямоугольником* и у него все стороны равны. По условию задач 33 и 34 данные четырехугольники являются параллелограммами, т.е. требуется доказать, что у них все стороны равны. Аналогично по условию задачи 40 данный четырехугольник является прямоугольником, т.е. требуется доказать, что у них все стороны равны.

В задаче 36 по условию дан четырехугольник, у которого все стороны равны, и для подведения под определение требуется доказать, что данный четырехугольник — параллелограмм.

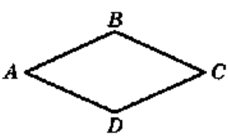



Рис. 41

Задачи на построение 38 и 39 полезно начать с анализа. Сначала изображается ромб (рис. 41), затем необходимо выделить заданные элементы более жирным изображением или цветом, и, наконец, определить схему построения.

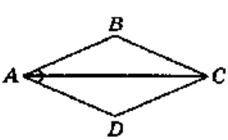



Рис. 42

Задача на построение 38 1). Из рисунка 42 видно, что сначала надо построить угол $BAD$, равный данному, провести его биссектрису, на биссектрисе угла отложить отрезок $AC$, равный данной диагонали, и на луче $CA$ построить угол $ACB$, равный углу $BAC$. Точка пересечения лучей $AB$ и $CB$ будет вершиной $B$ равнобедренного треугольника $ABC$. Затем, в силу определения параллелограмма, через точку $C$ провести прямую параллельную стороне $AB$, а через точку $A$ провести прямую, параллельную стороне $BC$. Точка пересечения прямых, параллельных сторонам $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$, и будет четвертой вершиной параллелограмма. Построенный параллелограмм является ромбом, что следует из признака ромба, доказанного в задаче 34.

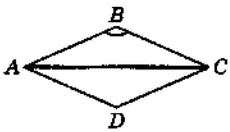



Рис. 43

Задача на построение 38 2). Из рисунка 43 видно, что сначала надо построить угол, смежный с углом $ABC$, затем разделить построенный угол пополам, построить равнобедренный треугольник $ABC$ по стороне $AC$, равной данной диагонали и двум прилежащим к ней углам, равным половине угла, смежного с углом $ABC$. Затем, как и в задаче 38 1) построить четвертую вершину параллелограмма. Треугольники $ADC$ и $ABC$ равны по стороне $AC$ и двум прилежащим к ней углам. Построенный параллелограмм является ромбом по определению, так как у него все стороны равны.

Задача на построение 39 1). Из рисунка 44 видно, что сначала надо построить равнобедренный треугольник $ABC$, у которого известны основание (диагональ ромба) и боковая сторона (сторона ромба). Затем, как и в задаче 38 1) построить четвертую вершину параллелограмма. Треугольники $ADC$ и $ABC$ равны по трем сторонам. Построенный параллелограмм является ромбом по определению, так как у него все стороны равны.

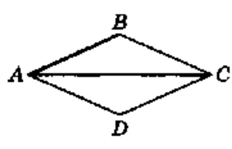



Рис. 44

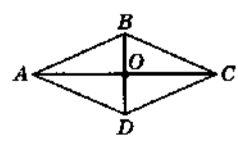



Рис. 45

Задача на построение 39 2). Из рисунка 45 видно, что сначала надо построить две пересекающиеся перпендикулярные прямые. Затем каждый из данных отрезков разделить пополам. От точки $O$ пересечения перпендикулярных прямых на одной прямой отложить равные отрезки $OC$ и $AO$, а на другой прямой — равные отрезки $OB$ и $OD$. Соединить последовательно точки $A$, $B$ и $D$. Построенный параллелограмм является ромбом, что следует из признака ромба, доказанного в задаче 33.

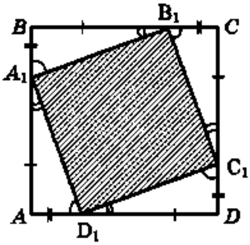



*Рис. 46*

В задаче 42 для доказательства того, что данный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом, нужно доказать равенство сторон (следует из равенства по двум катетам). Значит, $A_1B_1C_1D_1$ — ромб в силу доказательства задачи **36**. Второй вывод из равенства прямоугольных треугольников: равенство соответствующих углов. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Отсюда все углы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ — прямые. Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник, у которого все стороны равны. По определению $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом (рис. 46).

## Дополнительные задачи

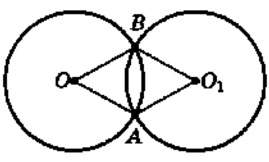



*Рис. 47*

**1.** Две окружности с центрами в точках $O$ и $O_1$ и равными радиусами пересекаются в точках $A$ и $B$. Докажите, что четырехугольник $AO_1BO$ — параллелограмм (рис. 47).

**2.** Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

**3.** Сторона ромба равна 18 см, а один из углов равен 150°. Найдите расстояние между его противолежащими сторонами.

**4*.** Определите, вершинами какого четырехугольника являются точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его.

# Заключительный урок по теме: «Параллелограмм и его частные виды»

## Комментарий для учителя

В пунктах 50–56 рассматривались определения, свойства и признаки параллелограмма и его частных видов: прямоугольника, ромба и квадрата. На заключительном уроке следует провести систематизацию и обобщение знаний и умений учащихся по изученной теме.

В результате систематизации и обобщения изученной темы учащиеся должны научиться:

– *распознавать* на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: выпуклые и невыпуклые четырехугольники, вписанные и описанные четырехугольники, параллелограммы, прямоугольники, ромбы, квадраты;

– *описывать* ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст;

– *выделять* в чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задачи;

– *понимать*, что все изученные в данной теме четырехугольники являются параллелограммами, а дополнительные свойства (равенство сторон или углов) позволяют выделять частные виды;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство определения, свойства и признаки четырехугольников.

## Методические рекомендации к изучению материала

*Рис. 48*

**1°.** На заключительном этапе изучения темы полезно *обобщить и систематизировать знания* учащихся о *параллелограммах и их частных видах.* Можно порекомендовать организовать урок в форме фронтальной беседы. Для этого можно предложить учащимся записать традиционную схему (рис. **48**), из которой видно, что прямоугольник и ромб обладают всеми свойствами параллелограмма и, кроме того, имеют свои, только им присущие свойства, а квадрат является универсальным четырехугольником, обладающим всеми свойствами, как параллелограмма, так и прямоугольника и ромба. После этого можно, двигаясь от четырехугольника к четырехугольнику, начать наполнять схему конкретными сведениями о свойствах четырехугольников. При этом можно для записи использовать зрительный ряд, т.е. фиксировать свойства четырехугольников с помощью рисунков и краткой записи. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 49.

Для повторения можно предложить примерно следующую последовательность:

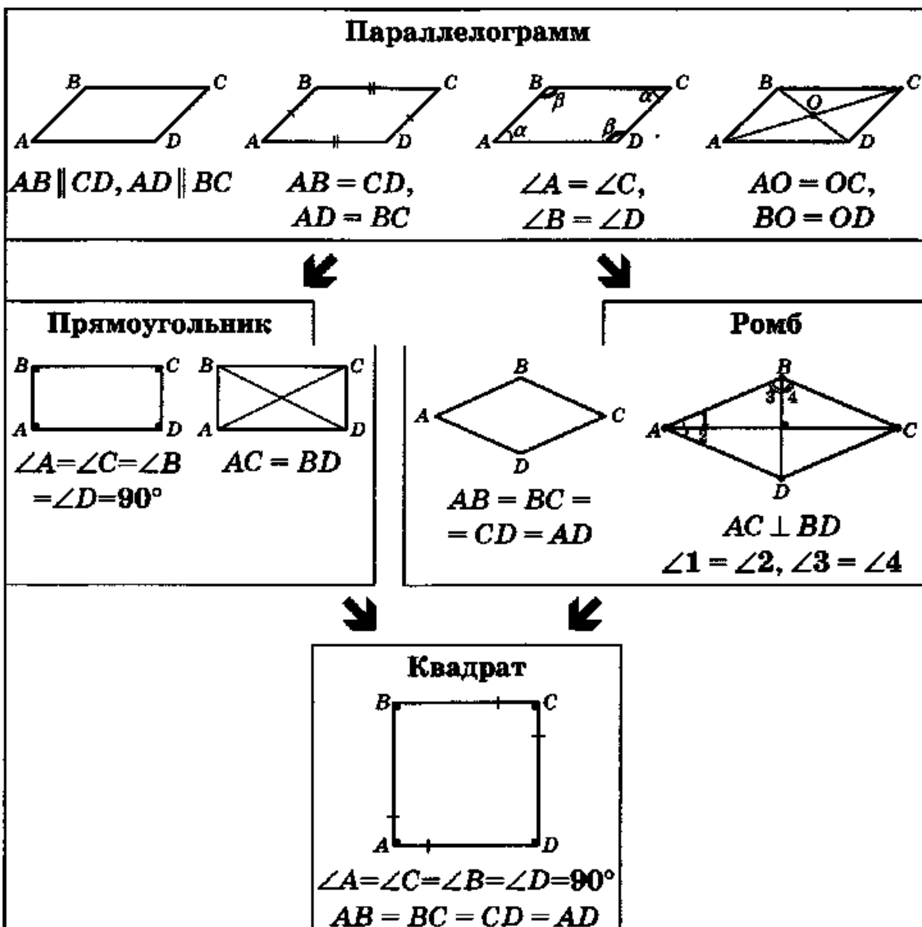



*Рис. 49*

1) повторить определение и свойства *параллелограмма*;

2) повторить определения и свойства *прямоугольника* и *ромба*, включая и свойства *параллелограмма*;

3) подчеркнуть, что параллелограмм, у которого *все углы равны*, является *прямоугольником*, а параллелограмм, у которого все *стороны равны*, является *ромбом*;

4) повторить характерные свойства частных видов параллелограмма:

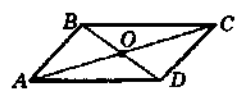
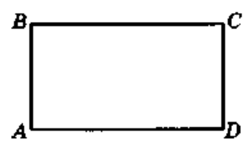
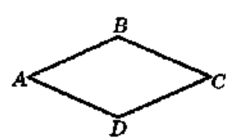
а) перпендикулярность сторон и равенство диагоналей прямоугольника и квадрата;

б) перпендикулярность диагоналей и равенство сторон квадрата и ромба;

в) свойство диагоналей квадрата и ромба быть биссектрисами соответствующих углов;

5) подчеркнуть универсальность квадрата, как частного вида параллелограмма.

Затем следует повторить признаки параллелограмма и его частных видов. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 50.

| | | |
|---|---|---|
| Если у четырехугольника:<br>1. $AB \parallel CD, AD \parallel BC,$<br>2. $AB \parallel CD\ AB = CD,$<br>3. $AO = OC, BO = OD$<br>4. $AB = CD, BC = DA$ | ➔ | <br>параллелограмм |
| Если у параллелограмма:<br>1. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$<br>2. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$<br>3. $\angle A = 90°$<br>4. $AC = BD$ | ➔ | <br>прямоугольник |
| Если у параллелограмма:<br>1. $AB = BC = CD = AD$<br>2. $AC \perp BD$<br>3. $AC$ биссектриса $\angle A$ и $\angle C$<br>Если у четырехугольника:<br>$AB = BC = CD = AD$ | ➔<br>➔ | <br>ромб |

Если у прямоугольника:

$\left.\begin{array}{l} 1.\ AB = BC = CD = AD \\ 2.\ AC \perp BD \end{array}\right\}$ ➔

Если у ромба:

$\angle A = 90°$ ➔

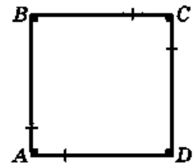



Рис. 50

***В рабочей тетради следует предложить учащимся посмотреть задания 56 и 57, в которых отражены свойства и признаки параллелограмма, затем можно просмотреть записи, сделанные при изучении каждого из частных видов параллелограмма.***

Из практики преподавания геометрии хорошо известно, что учащиеся, как правило, достаточно уверенно делают ссылки при решении задач на свойства фигур и испытывают определенные трудности при подведении фигуры под определение или признак. Поэтому следует еще раз обратить внимание учащихся на то, в каких ситуациях применяются свойства фигур, а в каких признаки:

если в условии задачи *дан параллелограмм* (прямоугольник, ромб или квадрат), то можно использовать в решении любое *свойство параллелограмма* (прямоугольника, ромба или квадрата);

если в условии задачи *дана характеристика* некоторого *четырехугольника* и по этой характеристике необходимо определить вид четырехугольника, то применяются *признаки*.

Проиллюстрировать применение *признаков параллелограмма* и *прямоугольника* можно на следующей задаче:

В окружности с центром в точке $O$ проведены диаметры $AC$ и $BD$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

На основании того, что диагонали (диаметры $AC$ и $BD$) четырехугольника, пересекаются в точке $O$ (центр окружности) и делятся пополам: четырехугольник — параллелограмм, а затем из равенства диагоналей (диаметры одной окружности): параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

**8*.** После проведенной систематизации и обобщения знаний учащихся о параллелограмме и его частных видах полезно провести повторение изученного материала в ходе решения задач.

Для этого можно использовать задачи из учебника, не решенные в процессе изучения темы, или задачи из дополнительных задач методического пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам. Особенно полезны для заключительного повторения в данной теме задачи на построение: решение задач 22, 23 посмотреть, задачи 38 и 39 решить.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы.*

### Контрольная работа по теме: «Параллелограмм и его частные виды»

*1-й вариант*

**1°.** Найдите углы параллелограмма, если они относятся как 5 : 1.

**2°.** Диагонали ромба $ABCD$ равны 6 см и 8 см, а его периметр равен 20 см. Найдите периметр треугольника $AOD$, где $O$ — точка пересечения диагоналей.

**3°.** На диагонали $AC$ квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки $AF$ и $CG$. Докажите, что $BGDF$ — ромб.

**4.** Докажите, что в ромб можно вписать окружность.

**5.** Постройте параллелограмм по стороне, диагонали и углу между ними.

*2-й вариант*

**1°.** Найдите углы параллелограмма, если один из них больше другого на 60°.

**2°.** Периметр треугольника $AOD$, где $O$ — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, равен 12 см. Найдите периметр ромба $ABCD$, если его диагонали равны 6 см и 8 см.

**3°.** На диагонали $AC$ прямоугольника $ABCD$ отложены равные отрезки $AF$ и $CG$. Докажите, что $BGDF$ — параллелограмм.

**4.** Докажите, что около прямоугольника можно описать окружность.

**5.** Постройте ромб по стороне и углу.

# Теорема Фалеса

## Комментарий для учителя

Рассматриваемая в пункте теорема Фалеса, играет значительную роль в любом курсе геометрии. Она будет применяться при доказательстве свойств средней линии треугольника и средней линии трапеции, теоремы о пропорциональных отрезках и при построении четвертого пропорционального отрезка, рассматриваемых в пунктах 58–60.

**Текущие результаты** изучения пункта 57. Учащиеся должны:

– *изображать и выделять* из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теорему *Фалеса*;

– *формулировать и объяснять формулировку теоремы Фалеса*;

– *доказывать* теорему *Фалеса*;

– *решать* задачи с использованием *теоремы Фалеса*.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Изучение теоремы *Фалеса* (теорема **6.6**) начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 51. Затем, используя рисунок, выделить в формулировке теоремы условие ($\angle O$, $A_1B_1$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$ — параллельные прямые, $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$) и заключение ($OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$), сделать краткую запись условия и заключения теоремы.

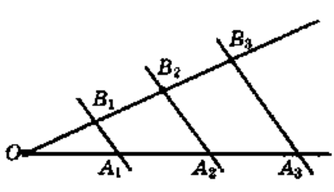



*Рис. 51*

Дано: $\angle O$;
$A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3$;
$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$

Доказать: $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

**2°.** Доказательство начинается с выполнения дополнительного построения: через точку $B_2$ провести прямую $EF$,

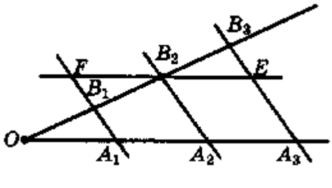



Рис. 52

параллельную $A_1A_3$ (рис. 52). Дополнительное построение всегда вызывает определенные трудности у учащихся, как в понимании, так и в усвоении. Поэтому можно провести небольшое исследование:

Откуда можно сделать вывод о равенстве отрезков?

1. из равенства треугольников,

2. из определений и свойств параллелограммов, в которых указаны равные стороны.

Значит необходимо сделать такое дополнительное построение, в результате которого получим равные треугольники.

Для того чтобы учащиеся лучше запомнили доказательство, усвоили его основные идеи, полезно сделать краткую запись его на доске:

1. Построение: прямая $FE$, параллельна $A_1A_3$.

2. Четырехугольники $A_1FB_2A_2$ и $A_2B_2EA_3$ — параллелограммы по *определению параллелограмма*.

3. $FB_2 = A_1A_2$; $B_2E = A_2A_3$ по *свойству параллелограмма* $FB_2 = B_2E$.

4. $\Delta B_1FB_2 = \Delta B3EB_2$ по стороне ($FB_2 = B_2E$) и двум углам ($\angle B_1B_2F = \angle B3B_2E$ — вертикальные, $\angle B_1FB_2 = \angle B3EB_2$ — накрест лежащие при параллельных прямых $A_1B_1$ и $A_3B_3$; и секущей $FE$.

5. <u>Вывод:</u> $B_1B_2 = B_2B_3$.

3°. Для *закрепления теоремы Фалеса* можно использовать следующие задания по готовым рисункам:

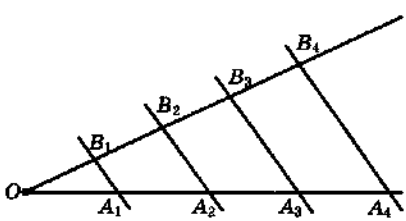



Рис. 53

1. Дано: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
$A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$;
$OB_4 = 28$ см

Найти: $OB_1$; $OB_2$; $OB_3$ (рис. 53).

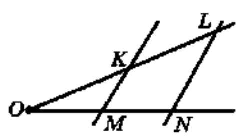



Рис. 54

2. Дано: $\angle KMO = \angle LNO$;
$OM = MN = 8$ см;
$OK = 13$ см.

Найти: $KL$ (рис. 54).

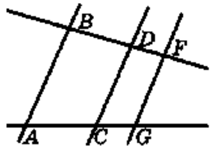



Рис. 55

3. Дано: $AB \parallel CD \parallel FG$;
$CG = 4$ см; $DF = 5$ см;
$BD = 10$ см.

Найти: $AC$ (рис. 55).

При выполнении последнего задания нужно обсудить замечания к теореме Фалеса. Поскольку в ходе доказательства теоремы *Фалеса* не использовалось условие, что параллельные прямые пересекают стороны угла, а использовалось условие, параллельные прямые пересекают две прямые, можно уточнить формулировку теоремы.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы **Фалеса**, а затем устно решить задачи 93–96. Задачи рабочей тетради 93, 95 и 96 полностью дублируют выше приведенные задачи 1–3.*

4°. Перед решением задачи 48 полезно напомнить учащимся, что в седьмом классе они решали задачу на построение : деление отрезка пополам. Этот алгоритм позволяет разделить отрезок на 2 равные части (а значит, и на 4, 8 и т.д.). А применение теоремы Фалеса дает способ деления отрезка на любое число равных частей.

Для лучшего усвоения алгоритма: деление отрезка на $n$ равных частей, можно сначала предложить учащимся несколько упрощенную формулировку задачи.

Разделите данный отрезок на три равные части.

Затем разобрать решение задачи 48 по тексту учебника.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить хорошо успевающим учащимся дома разобрать по тексту тетради решение задачи 97 и решить задачу 98.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 57, решить задачу 48; дома — вопрос 15, задача 49, предложить хорошо успевающим учащимся задачу 1 из дополнительных задач.

### Дополнительные задачи

**1.** Разделите данный отрезок в отношении **2 : 3.**

**2*.** Точки $K$ и $L$ — середины сторон $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые $AL$ и $CK$ делят диагональ $BD$ на три равные части.

## Средняя линия треугольника

В результате изучения пункта учащиеся должны:

Рассматриваемая в пункте средняя линия треугольника и теорема о средней линии треугольника позволяют значительно расширить класс задач. Теорема о средней линии треугольника полезна в ходе изучения темы: «Подобие треугольников».

**Текущие результаты** изучения пункта 58. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках среднюю линию треугольника;

– *формулировать* определение средней линии треугольника;

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы *о средней линии*;

– *доказывать* теорему *о средней линии*;

– *решать* задачи с использованием определения средней линии треугольника и теоремы о *средней линии*; свойств и признаков четырехугольников.

### Методические рекомендации к изучению материала

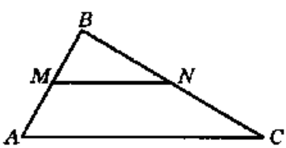


*Рис. 56*

**1°.** Понятие *средней линии треугольника* полезно ввести на наглядном уровне. В треугольнике $ABC$ отметим точку $M$ — середину стороны $AB$ и точку $N$ — середину стороны $BC$ и соединим точки $M$ и $N$. Отрезок $MN$ называется *средней линии треугольника* (рис. 56). После этого сформулировать определение *средней линии треугольника*. Для проверки усвоения учащимися понятия *средней линии треугольника* и умения распознавать ее на чертежах и рисунках в стандартных ситуациях можно выполнить работу по готовым чертежам, (например, как на рисунке 57, включив в их набор контрпримеры в) и д)):

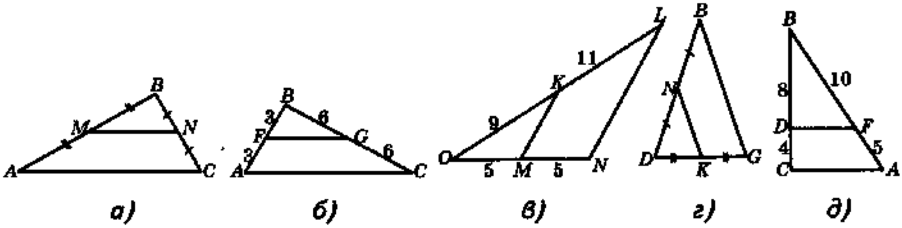



Рис. 57

1. Среди треугольников, приведенных на рисунках, найдите треугольники, в которых проведена *средняя линия треугольника.*
2. Определите, является ли отрезок $MN$ на рисунке 57 а) *средней линией треугольника* и объясните, почему.
3. Определите, является ли отрезок $DF$ на рисунке 57 д) *средней линией треугольника* и объясните, почему.
4. На рисунке 57 г) отрезок $KN$ является средней линей треугольника $DBG$, $DB = 14$ см, $DG = 10$ см. Чему равны отрезки $DK$, $KG$, $DN$, $NB$?
5. Сколько *средних линий* можно построить в данном треугольнике?

При введении определения *средней линией треугольника* основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения. Другими словами, если в условии сказано: «*отрезок FG — средняя линия треугольника ABC ...*», то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия равенства отрезков: $AF = FB$, $BG = GC$ (рис. 57 б).

*В рабочей тетради следует записать определение средней линией треугольника и выполнить задание 99, аналогичное приведенным выше упражнениям. Затем выполнить упражнение 100, направленное на формирование умения подводить под определение средней линией треугольника. В задаче 101 требуется построить среднюю линию треугольника. После построения средней линией треугольника полезно выяснить: сколько средних линий можно построить в данном треугольнике.*

**2*.** Как всегда, приступая к доказательству новой теоремы (теорема 6.7) необходимо начать с формулировки теоремы, выполнения чертежа по условию теоремы (рис. 58) и краткой записи условия.

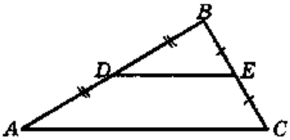


Рис. 58

Дано: $\Delta ABC$;
$ED$ — средняя линия треугольника.

Доказать: $DE \| AC$, $DE = \frac{1}{2} AC$.

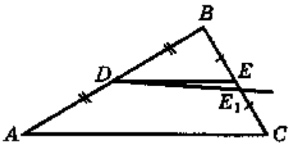


Рис. 59

В теореме доказываются два утверждения. Сначала доказываем параллельность $DE$ и $AC$. Для чего выполняется дополнительное построение: через точку $D$ провести прямую $DE_1$, параллельную стороне $AC$. Затем, с помощью теоремы Фалеса доказывается совпадение точек $E_1$ и $E$ (рис. 59).

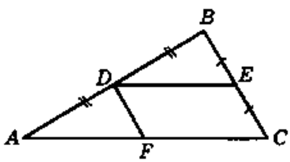


Рис. 60

Затем доказываем равенство $DE = \frac{1}{2} AC$. Для этого выполняется второе дополнительное построение: через точку $D$ провести *среднюю линию* $DF$ (рис. 60). При доказательстве $DF \parallel BC$ используется только что доказанный факт: *«средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне,...»*. По определению полученный четырехугольник $FDEC$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $DE = FC$. Второй раз применяем теорему Фалеса: точка $D$ — середина стороны $AB$, значит, точка $F$ — середина стороны $AC$. Отсюда $DE = \frac{1}{2} AC$.

Для того чтобы учащиеся лучше запомнили доказательство, усвоили его основные идеи, полезно сделать краткую запись его на доске:

1. Построение: прямая $DE_1 \| AC$;
2. По *теореме Фалеса* $E_1$ — середина стороны $BC$, т.е. точки $E$ и $E_1$ совпадают;
3. . <u>Вывод I:</u> $ED \| AC$.
4. Построение: *средней линии* $DF$;
5. $DF \parallel BC$ по доказанному выше;
6. $FDEC$ — параллелограмм *по определению*;
7. $DE = FC$ по *свойству параллелограмма*;
8. По *теореме Фалеса*: $F$ — середина стороны $AC$;

3. . <u>Вывод II:</u> $DE = \frac{1}{2} AC$.

3°. Для закрепления *теоремы о средней линии треугольника* можно предложить учащимся задачи 50 и 51. Затем по тексту учебника разобрать решение задачи 55. Решить задачу 56, с опорой на доказанное утверждение задачи 55: *«в любом четырехугольнике середины его сторон являются вершинами параллелограмма»*. При этом при решении задачи 55 полезно обратить внимание учащихся на то, что каждая из противолежащих сторон построенного параллелограмма равна половине соответствующей диагонали: $EF = GH = \frac{1}{2}AC$. $EH = FG = \frac{1}{2}BD$ (рис. 134 из учебника).

> *В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о **средней линии треугольника** и решить задачи 102–105, которые аналогичны задачам к пункту 58 учебника.*

**Примерное планирование изучения материала**

На уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 58, решить задачи 50, 51, 55, и 56; дома— вопрос 16, задачи 52, 54 и 57.

## Указания к задачам

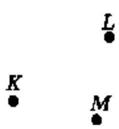



Рис. 61

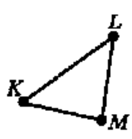



Рис. 62

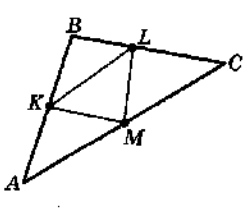



Рис. 63

Решение задачи 53 полезно начать с анализа. Пусть даны точки $K$, $L$ и $M$, которые являются серединами сторон искомого треугольника (рис. 61). Значит, отрезки $KM$, $KL$ и $LM$ (рис. 62) являются средними линиями этого треугольника, параллельными его сторонам. Таким образом, для построения треугольника нужно провести через точки $L$, $M$ и $K$ прямые, параллельные отрезкам $KM$, $KL$ и $LM$. Вершинами искомого треугольника будут точки пересечения этих прямых (рис. 63). Из того, что $KM \parallel BC$, $KL \parallel AC$ и $ML \parallel AB$ следует, что $AKLM$, $MKBL$ и $MKLC$ — параллелограммы. Отсюда, точки $M$, $L$ и $K$ — середины сторон треугольника $ABC$.

Задачи 56–58 решаются с опорой на утверждение задачи 55.

### Дополнительные задачи

**1.** Докажите, что средняя линия треугольника $ABC$, параллельная стороне $AB$, делит любой отрезок $CD$, соединяющий вершину $B$ с произвольной точкой $D$, пополам.

**2.** Точки $D$ и $E$ являются серединами сторон $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$. Определите длину стороны $AB$, если она на 4 см больше, чем средняя линия $DE$.

**3.** Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами квадрата.

## Трапеция

### Комментарий для учителя

В пункте вводится еще один четырехугольник — трапеция, рассматриваются свойства равнобокой трапеции, доказывается теорема о средней линии трапеции.

В результате изучения материала пункта учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках трапецию, равнобокую трапецию, среднюю линию трапеции;

– формулировать определения трапеции, равнобокой трапеции, средней линии трапеции;

– формулировать и объяснять формулировку теоремы о средней линии трапеции;

– доказывать теорему о средней линии трапеции;

– решать задачи с использованием определений трапеции, равнобокой трапеции, средней линии трапеции, теоремы о средней линии.

### Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Перед введением *определения трапеции* полезно вспомнить с учащимися определение параллелограмма. У параллелограмма по определению противолежащие стороны параллельны (рис. 64). Теперь будет рассмотрен такой вид четырехугольника, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие непараллельны (рис. 65). Значит, если в условии сказано: *«Четырехугольник ABCD — трапеция...»*, то учащиеся должны уметь выделить параллельные стороны: $BC \parallel AD$ и записать их в ходе решения задачи или в краткой записи условия.

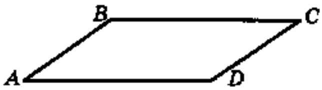



*Рис. 64*

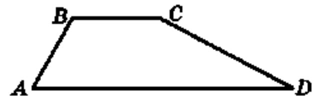



*Рис. 65*

На *закрепление понятия трапеции* можно предложить учащимся следующие вопросы:

> 1. В трапеции $ABCD$ проведите прямую $CF$, параллельную $AB$. Определите вид четырехугольника $ABCF$.
> 2. В трапеции $ABCD$ углы, прилежащие к стороне $AD$, равны 74° и 81° . Определите углы, прилежащие к стороне $BC$.

Первая из предложенных выше задач позволяет подчеркнуть отличие трапеции от параллелограмма, а вторая — их общность: *углы, прилежащие к боковым сторонам, являются внутренними односторонними при параллельных прямых* (основания трапеции или параллелограмма) *и секущей* (боковые стороны). При этом для параллелограмма это утверждение верно и для боковых сторон.

> *В рабочей тетради следует записать определение* трапеция *и выполнить задания 106–108. Задачи 107 и 108 полностью совпадают с выше приведенными задачами 1 и 2.*

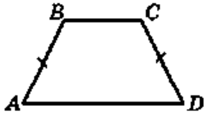



*Рис. 66*

2°. При введении определения *равнобокой трапеции* необходимо заметить, что к условию параллельности оснований добавляется еще одно условие, а именно: равенство боковых сторон. Другими словами, если в условии сказано: *«Четырехугольник ABCD — равнобокая трапеция...»*, то учащиеся должны уметь выделить и записать $BC \parallel AD$ и $AB = CD$ в ходе решения задачи или в краткой записи условия (рис. 66).

На применение определения *равнобокой трапеции* можно предложить учащимся решить следующую задачу:

> Докажите, что в равнобокой трапеции $ABCD$ высоты $BK$ и $CL$ отсекают от трапеции два равных прямоугольных треугольника $ABK$ и $DCL$.

Затем по тексту учебника разобрать решение задачу 60, в которой доказано важное свойство равнобокой трапеции: «*в равнобокой трапеции углы при основании равны*».

Задача 60 имеет второе решение, которое опирается на результат решения выше приведенной задачи, из равенства прямоугольных треугольников следует равенство углов при основании.

> *В рабочей тетради следует записать определение* ***равнобокой трапеции*** *и выполнить задачу 109, решение которой следует из решения приведенной выше задачи. Поскольку использование рабочей тетради позволяет значительно экономить время на уроке, можно предложить решить задачу 110, в которой сформулировано утверждение, обратное утверждению задачи 60 — признака* ***равнобокой трапеции.*** *Свойство* ***равнобокой трапеции: «в равнобокой трапеции диагонали равны»*** *и обратное ему утверждение (признак* ***равнобокой трапеции****), являются содержанием задач 110 и 112.*

**3°**. При введении определения *средней линией трапеции*, как всегда, основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения. Другими словами, если в условии сказано: «*отрезок FG — средняя линия трапеции ABCD …*», то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия равные отрезки: $AF = FB$, $CG = GD$ (рис. 68).

**4°**. Доказательство теоремы о *средней линии* (теорема 6.8) достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся. При этом для того, чтобы учащиеся лучше его усвоили, полезно сделать его краткую запись на доске (рис. 67):

1. Дополнительное построение: отрезок $BE$.

2. $\Delta PBC = \Delta PED$ по стороне ($CP = DP$) и двум углам $\angle BPC = \angle EPD$ (вертикальные), $\angle PBC = \angle PED$ (накрест лежащие);

3. $BC = ED$ (из $\Delta PBC = \Delta PED$);
4. $PQ$—средняя линия $\Delta ABE$;
5. <u>Вывод:</u> $PQ \parallel AE$, $PQ = \frac{1}{2}AE$, т.е.

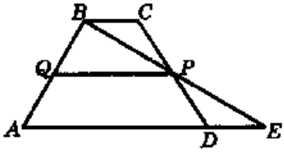


Рис. 67

$PQ \parallel AD$, $PQ = \frac{1}{2}(AD+BC)$.

Для того чтобы учащимся было легче запомнить идею доказательства и дополнительного построения, нужно еще объяснить им, что проводится такое построение, чтобы среднюю линию трапеции — отрезок $PQ$ — можно было рассматривать как среднюю линию треугольника $ABE$.

5°. Для закрепления теоремы *о средней линии трапеции* можно предложить учащимся задачи по готовому чертежу:

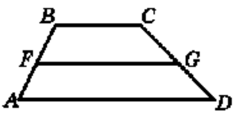


Рис. 68

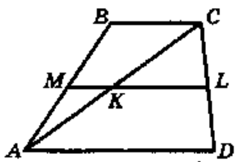


Рис. 69

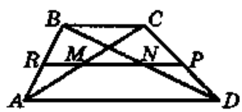


Рис. 70

1. В трапеции $ABCD$ стороны равны: $AB = 8$ см, $BC = 13$ см, $CD = 10$ см, $AD = 19$ см. $FG$ — средияя лииия трапеции. Найдите стороны трапеции $AFGD$.
2. В трапеции, одно из оснований которой равно 5 см, проведена средняя линия, длина которой равна 6 см. Чему равно другое осиование трапеции?
3. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ см и $BC = 8$ см проведена средняя лииия $ML$, которая пересекает диагональ $AC$ в точке $K$. Чему равны отрезки $MK$ и $KL$? (рис. 69).
4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекают средиюю линию $RP$ в точках $M$ и $N$. Докажите, что $RM = NP$.

В рабочей тетради следует записать определение *средней линии трапеции* и формулировку теоремы о *средней линии трапеции*. Для закрепления теоремы *о средней линии треугольника* можно предложить учащимся выполнить задачи из подборки с 114 по 110.

## Примерное планирование изучения материала

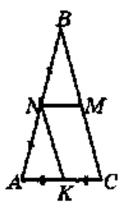
На первом уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 59, решить задачу 60; дома — вопросы 17–19, задачи 61, 67–69.

На втором уроке: в классе — провести самостоятельную работу, решить задачи 64, 66 и 70; дома — задачи 62, 63 и 65.

## Самостоятельная работа по теме: «Средняя линия треугольника. Трапеция»

Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

### *1-й вариант*

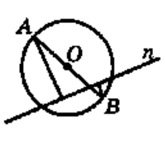



**1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$), периметр которого равен 18 см, проведены средние линии $KN$ и $NM$. Найдите периметр четырехугольника $KNMC$, если основание треугольника равно 4 см.

*Ответ:* 1. 14 см; 2. 18 см; 3. 13 см; 4. 11 см.

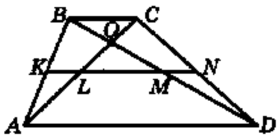
**2.** Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон прямоугольника, отличного от квадрата.

1. *параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба*;
2. *прямоугольник, отличный от квадрата*;
3. *ромб, отличный от квадрата*;
4. *квадрат*.



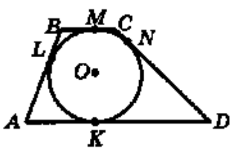

**3.** Диаметр $AB$ окружности пересекает прямую $n$ так, что расстояния от концов диаметра до прямой $n$ равны 7 см и 1 см. Найдите расстояние от центра окружности точки $O$ до прямой $n$.

*Ответ:* ______________________




**4.** Диагонали трапеции $ABCD$ делят её среднюю линию $KN$ на три отрезка. Отрезки $KL$ и $LM$ равны 6 см и 8 см соответственно. Найдите большее основание трапеции.

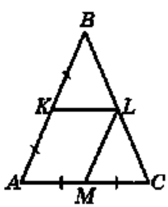
*Ответ:* 1. 16 см; 2. 14 см; 3. 12 см; 4. 28 см.




**5.** В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее боковые стороны равны 6 см и 11 см.

*Ответ:* ____________________

*2-й вариант*

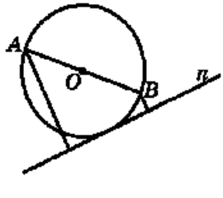



**1.** В равностороннем треугольнике $ABC$ отмечены точки $K$, $L$ и $M$, которые являются серединами сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно. Найдите периметр четырехугольника $AKLM$, если периметр треугольника $KBL$ равен 18 см.

*Ответ:* 1. 12 см; 2. 24 см; 3. 18 см; 4. 6 см.

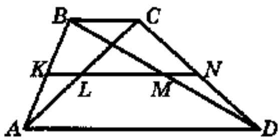
**2.** Определите вид четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон трапеции, если ее диагонали перпендикулярны и не равны.

1. *параллелограмм, отличный от прямоугольника*;
2. *прямоугольник, отличный от квадрата*;
3. *ромб, отличный от квадрата*;
4. *квадрат*.



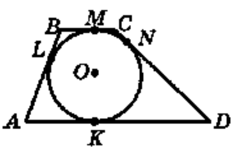

**3.** Расстояния от концов диаметра $AB$ до касательной к этой окружности $n$ равны 7 см и 1 см. Найдите расстояние от центра окружности $O$ до касательной $n$.

*Ответ:* ____________________




**4.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 22$ см и $BC = 8$ см проведена средняя линия $KN$, которая пересекает диагонали $AC$ и $BD$ в точках $L$ и $M$ соответственно. Найдите длину отрезка $LN$.

*Ответ:* 1. 11 см; 2. 15 см; 3. 7 см; 4. 8 см.




**5.** В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.

*Ответ:* ______________________

## Указания к задачам

Условия многих задач, рекомендованных к данному пункту учебника, перед решением полезно прокомментировать.

Задача **60**, решение которой рассматривается в тексте учебника, — опорная. Доказанное в ней свойство равнобокой трапеции: *«в равнобокой трапеции углы при основании равны»* может быть использовано при решении задач **61–64**, **70**. Как было сказано выше полезно рассмотреть два способа решения этой задачи.

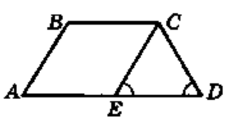



*Рис. 71*

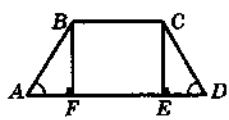



*Рис. 72*

1-й способ использует дополнительное построение: $CEAB$. При этом трапеция разбивается на параллелограмм и равнобедренный треугольник. Далее применяется свойство углов при основании равнобедренного треугольника (рис. 71).

2-й способ использует дополнительное построение: $BF \perp AD$, $CE \perp AD$ (рис. 72). При этом от трапеции отсекаются два прямоугольных треугольника, прилежащих к ее боковым сторонам, и равных по катету и гипотенузе. Отсюда равны углы, прилежащие к большему основанию. Углы при меньшем основании тоже равны, как внутренние односторонние углы при параллельных прямых.

Данная задача является опорной не только в силу получаемого результата (равенство углов при основании равнобокой трапеции), но и в силу используемых приемов решения, которые довольно часто применяются при решении задач, связанных с трапециями. На это полезно обратить внимание учащихся:

*1. Для любой трапеции перпендикуляры, опущенные из вершин одного основания на другое, — высоты трапеции — равны, так как являются расстоянием между параллельными прямыми;*
*2. В равнобокой трапеции перпендикуляры, проведенные из вершин меньшего основания к большему, отсекают от трапеции два прямоугольных треугольника, равных по катету и гипотенузе;*
*3. В равнобокой трапеции перпендикуляры, проведенные из вершин меньшего основания к большему, делят большее основание на два равных между собой отрезка и отрезок, равный меньшему основанию;*
*4. В равнобокой трапеции углы при основании равны;*
*5. Прямая, проходящая через вершину меньшего основания параллельно боковой стороне, разбивает любую трапецию на параллелограмм и треугольник;*
*6. В равнобокой трапеции этот треугольник является равнобедренным.*

Основную сложность в решении задачи 59 вызывают построение чертежа по вербальному описанию условия задачи и особенно дополнительные построения (рис. 73).

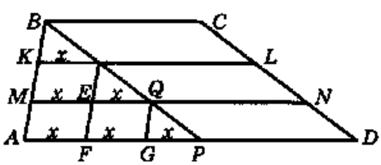



Рис. 73

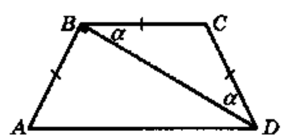



Рис. 74

Поэтому эту задачу рекомендуется решить в классе и выполнение чертежа следует прокомментировать учителю: в треугольнике $MBQ$ отрезок $KR$ является средней линией; проводим прямую $RF \parallel AB$, точка $E$ — середина стороны $MQ$ (по теореме Фалеса). Аналогичные рассуждения проводим относительно треугольника $FRP$. Далее решение видно из чертежа.

В решении задачи 62 используется свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°.

В решении задач 63 и 70 рекомендуется использовать результат вспомогательной задачи, данной в разделе «методические рекомендации»: *«в равнобокой трапеции перпендикуляры, проведенные из вершин меньшего основания к большему, делят большее основание на два равных между собой отрезка и отрезок, равный меньшему основанию»*.

Для решения задачи 64 необходимо составить уравнение. В равнобедренном треугольнике $BCD$ углы $DBC$ и $BDC$ равны (свойство углов при основании равнобедренного треугольника), угол $ABC$ равен углу $DCB$ (свойство углов при основании равнобокой трапеции), а значит, равен сумме $90^\circ + \alpha$ (рис. 74). В силу теоремы о сумме углов треугольника: $\alpha + \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$.

Условия задач 65 и 66 кажутся на первый взгляд похожими. Однако при их решении применяются разные способы решения. Задача 65 после доказательства, что точка $G$ — середина отрезка $CD$ (теорема Фалеса), становится задачей на прямое применение теоремы о средней линии трапеции (рис. 75).

Задача 66 более трудная. После того, как выполнено построение чертежа по описанию конфигурации в задаче, надо помочь учащимся увидеть, какие дополнительные построения необходимо выполнить, чтобы на рисунке появилась трапеция, ее диагонали и средняя линия. Выполнение дополнительных построений приводит заданную в задаче конфигурацию к знакомой и позволяет вести поиск решения с опорой на известные геометрические факты (рис. 76). Решить задачи будет проще, если перед ее решением решить задачу 2 из дополнительных задач.

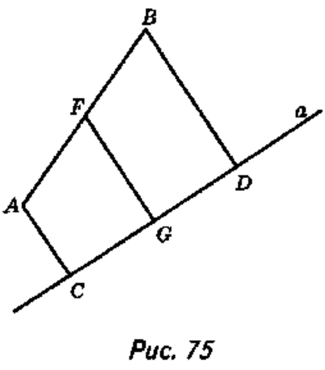



Рис. 75

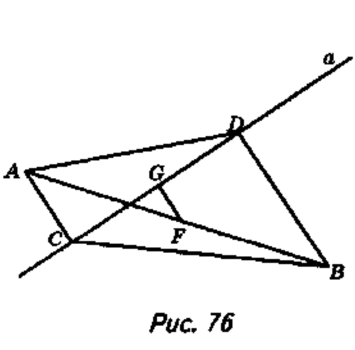



Рис. 76

Задачи на построение 71 и 72 полезно начать с анализа. Как всегда анализ выполним с помощью чертежа Сначала изображается трапеция (рис. 77), затем необходимо выделить заданные элементы более жирным изображением или цветом, и, наконец, определить схему построения. Общим приемом решения этих задач является поиск треугольника, стороны которого заданы или легко могут быть получены из данных элементов.

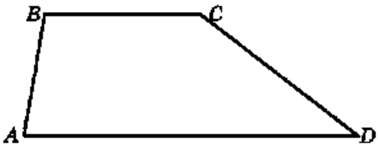



Рис. 77

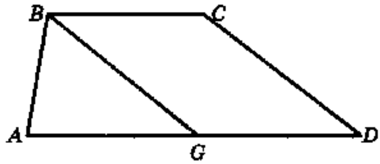



Рис. 78

Задача на построение 71. Из рисунка 78 видно, что сначала надо построить треугольник $ABG$, у которого две стороны равны боковым сторонам трапеции, а третья разности оснований. Затем через точку $B$ провести прямую, параллельную стороне треугольника $AG$, и на луче $BC$ отложить отрезок, равный меньшему основанию. И, наконец, через точку $C$ провести прямую, параллельную стороне треугольника $BG$, до пересечения в точке $D$ с продолжением стороны $AG$ треугольника $ABG$. Построенный четырехугольник является трапецией в силу определения. Единственность следует из единственности построения треугольника по трем сторонам; из единственности откладывания отрезка, равного данному, от начала луча; из единственности построения прямой, параллельной данной.

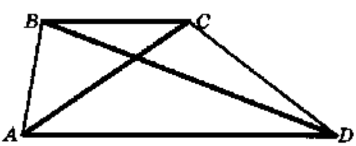



Рис. 79

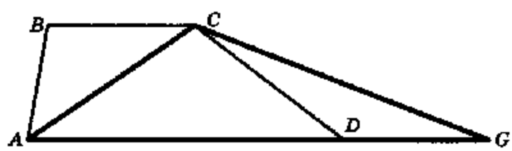



Рис. 80

Задача на построение 72. На рисунке 79 выделены данные в условии задачи элементы. Из рисунка 80 видно, что сначала надо построить треугольник $ACG$, у которого две стороны равны диагоналям трапеции, а третья сумме оснований. Затем через точку $C$ провести прямую, параллельную стороне треугольника $AG$, и на луче $CB$ отложить отрезок, равный меньшему основанию, а на луче $AG$ отложить отрезок, равный большему основанию. И, наконец, последовательно соединить точки $A$ и $B$, $C$ и $D$. Построенный четырехугольник является трапецией в силу определения. Единственность следует из единственности построения треугольника по трем сторонам; из единственности откладывания отрезка, равного данному, от начала луча; из единственности построения прямой, параллельной данной.

### Дополнительные задачи

1. Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на три равные части. Определите, как относятся основания этой трапеции.

2. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям трапеции и равен полуразности оснований.

3. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

## Пропорциональные отрезки. Замечательные точки треугольника

### Комментарий для учителя

Рассматриваемая теорема *о пропорциональных отрезках* (теорема 6.9) носит вспомогательный характер, поэтому воспроизведения ее доказательства можно не требовать от всех учащихся. В зависимости от уровня подготовки класса можно изложить доказательство только для соизмеримого случая, а общий случай оставить для внеклассной или индивидуальной работы. В задаче 6.1 учащиеся знакомятся с алгоритмом построения четвертого пропорционального отрезка. Замечательные точки треугольника являются обобщением свойств элементов треугольника.

**Текущие результаты** изучения пунктов 60, 61. Учащиеся должны:

– *изображать и выделять* из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теорему о *пропорциональных отрезках*;

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы *о пропорциональных отрезках*;

– *объяснять*: какие точки треугольника называются *замечательными точками*;

– *решать* задачи с использованием теоремы о *пропорциональных отрезках*; задачи на построение четвертого пропорционального.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Перед рассмотрением *теоремы о пропорциональных отрезках* можно предложить учащимся решить следующее упражнение:

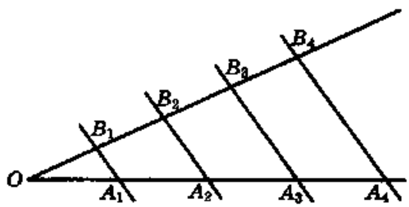



Рис. 81

Стороны угла $O$ пересекают параллельные прямые $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ и $A_4B_4$ так, что $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$. Докажите, что $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{OA_3}{OB_3} = \ldots$(рис. 81).

Решение.

1) Пусть $OA_1 = a$, тогда $OA_2 = 2a$, $OA_3 = 3a$, $OA_4 = 4a$,

2) По теореме Фалеса $OB_1 = OB_2 = OB_3 = OB_4 = \ldots$.

Пусть $OB_1 = b$, тогда $OB_2 = 2b$, $OB_3 = 3b$, $OB_4 = 4b\ldots$

3) $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{a}{b}$; $\dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{2a}{2b} = \dfrac{a}{b}$; $\dfrac{OA_3}{OB_3} = \dfrac{3a}{3b} = \dfrac{a}{b}$; ....

4) Значит, $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{OA_3}{OB_3} = \ldots$, что и требовалось доказать.

Таким образом, можно сделать вывод: что отрезки, отсекаемые на сторонах угла параллельными прямыми, пропорциональны.

**2°.** Доказательство *теоремы о пропорциональных отрезках*, приведенное в учебнике, достаточно трудно, поэтому его изложение можно рекомендовать провести учителю самому без привлечения учащихся по следующему плану:

1. сформулировать условие теоремы и объяснить смысл формулировки;

2. изложить доказательство теоремы;

3. привести пример применения теоремы.

Как всегда, доказательство теоремы *о пропорциональных отрезках* (теорема 6.9) необходимо начать с формулировки теоремы, выполнения чертежа по условию теоремы (рис. 82) и краткой записи условия:

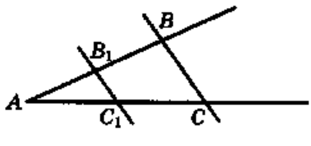



Рис. 82

Дано: $\angle BAC$;
$B_1C_1 \parallel BC$;

Доказать: $\dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{AB_1}{AB}$.

Доказательство проводится в соответствии с текстом учебного пособия. Можно порекомендовать в ходе доказательства, как в выше рассмотренной задаче, обозначить равные отрезки, откладываемые на стороне угла $AC$, через $a$, а получившиеся в результате пересечения стороны $AB$ параллельными прямыми, через $b$. Тогда доказательство первой части будут аналогично решенню выше рассмотренной задачи.

После доказательства теоремы можно по аналогии с теоремой Фалеса сделать замечание о том, что данная теорема справедлива и в случае, когда речь идет не о сторонах угла, а о любых двух прямых. Например:

Выполните задание по рисунку 83 а) и б):

Дано: $AB \parallel CD \parallel FG$;
$CG = 4$ см;
$DF = 5$ см;
$BD = 10$ см.

Найти: $AC$.

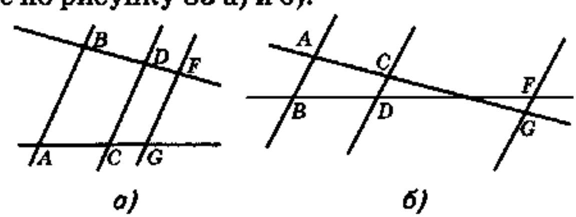



Рис. 83

3°. На прямое применение *теоремы о пропорциональных отрезках* можно предложить учащимся выполнить упражнение:

На рисунке 82 $B_1C_1 \parallel BC$. Определите длину отрезка $BB_1$, если $AC_1 = 4$ см, $AC = 9$ см, $AB_1 = 6$ см.

4°. Построение *четвертого пропорционального отрезка* является задачей на применение теоремы о *пропорциональных отрезках*. Можно рекомендовать изложение ее решения провести учителю самому без привлечения учащихся.

**5°.** Пункт 61 можно предложить для самостоятельной работы дома. На втором уроке по материалам пунктов 60 и 61 провести беседу, в ходе которой рассмотреть алгоритм построения четвертого пропорционального отрезка, обсудить вопросы 21 и 22 и решить задачи 73, 74(2), 75 и 76.

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 61;

дома — вопрос 20, самостоятельно разобрать материал пункта 61, вопросы 21 и 22, задачи 72, 74(1).

На втором уроке: в классе — провести беседу по материалу пункта 61, решить задачи 73, 74(2), 75, 76; дома — задачи 71, 77.

## Указания к задачам

Решение задачи 73 видно из рисунка 84.

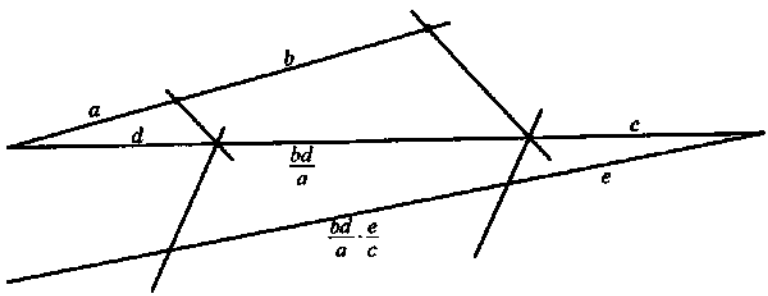



*Рис. 84*

Решение задачи 74 не использует материала последних двух пунктов. Ее решение полезно рассмотреть при подготовке к контрольной работе по теме: «Четырехугольники».

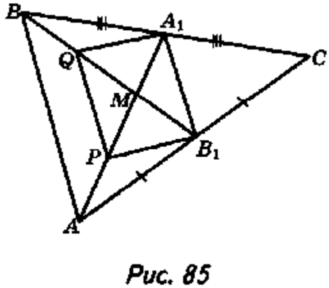



*Рис. 85*

1. Доказательство того, что $A_1B_1PQ$ — параллелограмм (рис. 85), аналогично доказательству задачи 55, приведенному в учебном пособии, и опирается на теорему о *средней линии треугольника*. Последовательное применение теоремы о *средней линии треугольника* к треугольникам $ABC$ и $ABM$ позволяет сделать вывод о параллельности и равенстве $A_1B_1$ и $PQ$, что в свою очередь позволяет применить *признак параллелограмма*.

2. Медианы $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются, так как пересекаются диагонали параллелограмма $A_1B_1PQ$. Точкой пересечения $M$ они делятся пополам. При этом $AP = PM$ и $BQ = QM$ так как $PQ$ — средняя линия треугольника $ABM$. Кроме того $PM = MA_1$, $QM = MB_1$ так как $QB_1$ и $PA_1$ — диагонали параллелограмма $A_1B_1PQ$. Значит, $AM = 2MA_1$ и $BM = 2MB_1$. Значит, точка $M$ делит медианы $AA_1$ и $BB_1$ в отношении **2 : 1**, считая от вершины. Аналогично доказывается, что медианы $AA_1$ и $CC_1$, а также медианы $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются и в каждом случае точка пересечения делит медианы в отношении **2 : 1**, считая от вершины.

3. Точка пересечения медиан $AA_1$ и $CC_1$ лежит на отрезке $AA_1$ и делит медиану $AA_1$ в отношении **2 : 1**, считая от вершины, т.е. совпадает с точкой $M$. Отсюда следует, что все три медианы, пересекаются в одной точке.

Таким образом, доказано очень важное свойство медиан треугольника, которое можно использовать при решении многих задач. Поэтому полезно, чтобы учащиеся его запомнили.

Можно предложить учащимся на закрепление этого свойства задачи 2–4 из дополнительных задач.

## Дополнительные задачи

**1.** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $M$ и $K$ соответственно. Найдите длину отрезка $CK$, если отрезок $MK$ параллелен стороне $AC$, а $AM = \mathbf{6}$ см, $BM = \mathbf{9}$ см, $BK = \mathbf{12}$ см.

**2.** Медианы равностороннего треугольника пересекаются в точке $O$ и равны **6** см. Найдите расстояния от точки $O$ до вершин и сторон треугольника.

**3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ к боковым сторонам проведены медианы, которые пересекаются в точке $M$. Докажите, что треугольник $AMC$ равнобедренный, и найдите его боковые стороны, если медиана, проведенная к боковой стороне треугольника $ABC$, равна **15** см.

**4.** Медианы треугольнике $ABC$ пересекаются в точке $M$. Через точку $M$ проведена прямая, параллельная стороне $AC$. Найдите длины отрезков, на которые разбивается сторона $AB$, если она равна 12 см.

**5.** Объясните, как можно разделить данный отрезок в отношении $2 : 5$.

## Систематизация и обобщение знаний по теме «Четырехугольники»

### Комментарий для учителя

**1°.** В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Четырехугольники» учащиеся должны:

– *распознавать* на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: выпуклые и невыпуклые четырехугольники, вписанные и описанные четырехугольники, параллелограммы, прямоугольники, ромбы, квадраты, трапеции, равнобокую трапецию; среднюю линию треугольника и среднюю линию трапеции;

– *изображать и выделять* из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теорему *Фалеса*;

– *изображать и выделять* из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теорему о *пропорциональных отрезках*;

– *выполнять* рисунок по условию задачи;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения всех видов параллелограмма, всех видов трапеции; средней линии треугольника и средней линии трапеции;
- признаки и свойства параллелограмма и его видов, трапеции и ее видов, свойств средней линии треугольника и средней линии трапеции; теоремы Фалеса и теоремы о *пропорциональных отрезках*.

**2°.** Подготовку к контрольной работе по теме: «Четырехугольники» полезно организовать, как урок решения задачи. Для этого можно использовать задачи: 8, 9, 11, 12, 45, 47, 53, 58, 59 из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты 8 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение» для § 6 «Четырехугольники» рекомендованы тесты 2, 3, 4, 5 и 6, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Первый вариант: итоговый тест по теме можно создать, используя часть заданий из каждого теста. При этом полезно включить в него задание 5 из теста 2 и задания 4, 8 из теста 4.

Второй вариант: Однако, поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

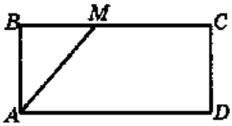
Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания на определение вида некоторой фигуры. Использование таких заданий крайне полезно для обучения школьников умению применять определения фигур и их признаки, проводя при этом доказательные рассуждения. Таким образом, при определении вида той или иной фигуры учащиеся должны не полагаться на чертеж, а проверять правильность своего утверждения с помощью известных теорем о признаках и свойства данной фигуры.

3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

*При использовании в учебном процессе рабочей тетради, ее можно использовать, как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из нерешенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.*

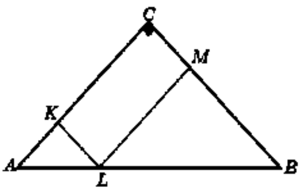
## Контрольная работа по теме: «Четырехугольники»

### *1-й вариант*



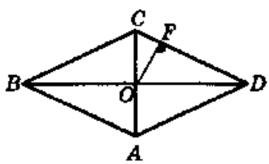

**1.** В прямоугольнике $ABCD$ проведена биссектриса угла $A$. Найдите периметр прямоугольника, если $BM = 2$ см, $CM = 3$ см.

*Ответ:* 1. 10 см; 2. 7 см; 3. 14 см; 4. 4 см.




**2.** В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан параллелограмм $LKCM$ так, что они имеют общий прямой угол $C$, а вершина противоположного угла лежит на гипотенузе $AB$. Найдите периметр параллелограмма, если $AC = 12$ см.

*Ответ:* ____________________



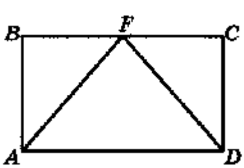

**3.** В ромб $ABCD$ с острым углом 30°, расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба $CD$ равно 3 см. Найдите периметр ромба.

*Ответ:* 1. 6 см; 2. 48 см; 3. 12 см; 4. 24 см.

**4.** В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее боковые стороны равны 6 см и 11 см.

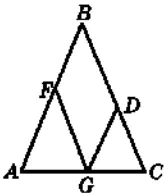
**5.** В окружности с центром в точке $O$ проведены взаимно перпендикулярные диаметры $AC$ и $BD$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

### *2-й вариант*



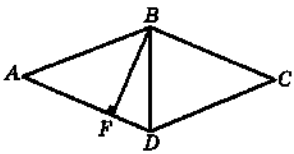

**1.** Биссектрисы углов $A$ и $D$ прямоугольника $ABCD$ пересекаются на стороне $BC$ в точке $F$. Найдите периметр прямоугольника, если длина $BF$ равна 6 см.

*Ответ:* 1. 18 см; 2. 36 см; 3. 12 см; 4. 30 см.




**2.** На сторонах равнобедренного треугольника $ABC$ отмечены такие точки $F$, $D$ и $G$, что $FBDG$ — параллелограмм. Найдите периметр параллелограмма, если $BC = 14$ см.

*Ответ:* ______________________




**3.** Найдите высоту $BF$ ромба $ABCD$, если $\angle ADB = 75°$, а сторона — 5 см.

*Ответ:* 1. 2,5 см; 2. 7,5 см; 3. 10 см; 4. 5 см.

**4.** В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.

**5.** Две окружности с центрами в точках $O$ и $O_1$ и равными радиусами пересекаются в точках $A$ и $B$. Определите вид четырехугольника $AO_1BO$.

# § 7. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В параграфе рассматривается материал традиционный для любого курса планиметрии: теорема Пифагора и ее следствия, тригонометрические функции острого угла (синус, косинус и тангенс), решение прямоугольных треугольников и неравенство треугольника. Теоретический материал этого параграфа широко применяется при решении самых разнообразных геометрических задач. Доказанные здесь теоремы и формулы служат основой алгебраического аппарата геометрии.

Значительную часть параграфа составляет тригонометрический материал. Вводятся определения синуса, косинуса и тангенса острого угла. Учащиеся знакомятся с некоторыми свойствами тригонометрических функций, а именно, с теоремами, отражающими зависимость тригонометрических функций только от величины угла, изменениями тригонометрических функций в зависимости от изменения величины угла. Кроме того, учащиеся знакомятся здесь с некоторые основными тригонометрическими тождествами. При изучении части теоретического материала, связанного с тригонометрией, необходимо четко разделить его на вспомогательный и основной материал. К вспомогательному материалу следует отнести теоремы о зависимости тригонометрических функций только от величины угла и изменениях тригонометрических функций в зависимости от изменения величины угла. Эти теоремы необходимы с одной стороны для доказательства других теорем курса, а с другой стороны, и при решении прямоугольных треугольников для понимания, что если для двух острых углов известны значения одной и той же тригонометрической функции, то по этому значению можно сделать вывод, какой из углов больше или меньше. Как и в любом курсе планиметрии, здесь определяются значения тригонометрических функций углов $30^\circ$, $45^\circ$ и $60^\circ$ в радикалах. Знание, этих величин позволяет существенно упростить вычисления, поэтому целесообразно, чтобы учащиеся их запомнили.

**Планируемые итоговые результаты изучения седьмого параграфа:**

Учащиеся должны научиться:

– *описывать* ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст;

– *выделять* в чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задачи;

– *иллюстрировать* и *объяснять* формулировки: теоремы Пифагора, неравенства треугольника;

– *объяснять* тригонометрические термины *«синус»*, *«косинус»*, *«тангенс»* и *«котангенс»*, *оперировать* с начальными понятиями тригонометрии;

– *решать* прямоугольные треугольники;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы Пифагора, неравенства треугольника, соотношения между сторонами и углами в прямоугольных треугольниках;
- определения тригонометрических функций и тригонометрические тождества.

## Косинус угла

### Комментарий для учителя

В этом пункте вводится определение косинуса острого угла. Заметим, что косинус острого угла определяются как отношение катета и гипотенузы прямоугольного треугольника и доказывается, что косинус зависит только от величины угла (теорема **7.1**).

Эта теорема будет применяться при доказательстве теоремы Пифагора уже в следующем пункте.

**Текущие результаты** изучения пункта 62. Учащиеся должны:

– *изображать и выделять* из конфигурации, изображенной на чертежах или рисунках, прямоугольный треугольник, позволяющий применить определение косинуса острого угла;

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы 7.1;

– *доказывать* теорему 7.1;

– *объяснять* термин *«косинус»*;

– *решать* задачи на вычисление косинуса острого угла данного прямоугольного треугольника;

– *решать* задачи на построение острого угол по значению его косинуса.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Перед введением определения *косинуса острого угла прямоугольного треугольника* полезно вспомнить с учащимся названия сторон *прямоугольного треугольника.*

При введении определения полезно обратить внимание учащихся на то, что, если в условии сказано: «... *косинус острого угла прямоугольного треугольника равен* ...», то это означает, что задано отношение прилежащего к данному углу катета и гипотенузы. При этом следует подчеркнуть, что данное определение *косинуса острого угла прямоугольного треугольника* относится именно к углу *острому* и к треугольнику *прямоугольному*, что и подчеркивается в самом названии: «*косинус острого угла прямоугольного треугольника*».

После введения определения *косинуса острого угла прямоугольного треугольника*, данного в учебнике, на формирование умения применять это определение можно предложить учащимся выполнить устно упражнения по готовым чертежам:

1. Дан прямоугольный треугольник $ABC$. По данным рисунка 86 выразите $\cos A$ и $\cos B$ через стороны прямоугольного треугольника $ABC$.

2. В прямоугольном треугольнике катет равен 8 см, а косинус прилежащего угла равен 0,8. Чему равна гипотенуза?

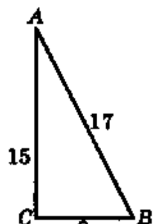


*Рис. 86*

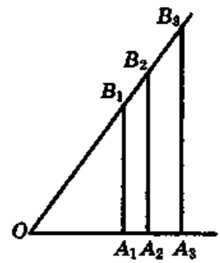


*Рис. 87*

3. На сторонах угла $B_3OA_3$ отложены отрезки $OB_1 = 5$ см, $OB_2 = 6{,}25$ см, $OB_3 = 8$ см (рис. 87). Из точек $B_1$, $B_2$ и $B_3$ опущены перпендикуляры на другую сторону угла, причем $OA_1 = 3$ см, $OA_2 = 3{,}75$ см, $OA_3 = 5{,}8$ см. Найдите $\cos O$ из: а) $\Delta A_1OB_1$, б) $\Delta A_2OB_2$, в) $\Delta A_3OB_3$.

В выше приведенной задаче 3 значение *косинуса острого угла O прямоугольного треугольника* находили из разных прямоугольных треугольников с общим острым углом. В результате можно сделать вывод, что значение *косинуса острого угла O прямоугольного треугольника* не зависит от выбора прямоугольного треугольника с одним и тем же острым углом. Во всех случаях результат получился один и тот же, хотя размеры треугольников были различны. Отсюда следует, что справедливо утверждение: ***«Если в двух прямоугольных треугольниках острые углы равны, то косинусы этих углов равны»***.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения* ***косинуса острого угла А прямоугольного треугольника*** *и устно выполнить задания 112–114, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–3. Цель их выполнения такая же: сформировать умение <u>применять</u> введенное <u>определение</u>. После обсуждения решения задачи 114 записать формулировку теоремы о* ***косинусе острого угла А прямоугольного треугольника.***

**2°.** Эта формулировка равноценна приведенной в учебнике формулировке теоремы о *косинусе острого угла* (теорема 7.1).

Доказательство теоремы достаточно просто, поэтому его можно провести с привлечением учащихся по следующему плану:

1. Выполнить дополнительное построение: построить треугольник $AB_1C_1$, равный данному треугольнику $A'B'C'$;

2. $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$ по теореме о *пропорциональных отрезках*;

3. $AB_1 = A'B'$ и $AC_1 = A'C'$ по построению $\Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C'$;

4. <u>Вывод</u>: $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$.

**3°.** Для закрепления теоремы о *косинусе острого угла прямоугольного треугольника* и проверки ее усвоения можно предложить учащимся решить следующие задачи:

**4.** В треугольниках $ABC$ и $MLK$: $\angle C = \angle K = 90°$, $\angle A = \angle M$, $AB = 18$ см, $ML = 6$ см, $MK = 3$ см. Чему равен катет $AC$?

**5.** В треугольниках $ABC$ и $MLK$: $\angle C = \angle K = 90°$, $\angle A = \angle M$, $AB = 15$ см, $AC = 5$ см, $MK = 8$ см. Чему равна гипотенуза $ML$?

**6.** В треугольнике $ABC$ высота $CD$, опущенная из вершины прямого угла $C$, делит гипотенузу $AB$ на отрезки AD = 5 см и $DB = 4$ см. Чему равен катет $BC$?

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради после доказательства теоремы о* ***косинусе острого угла прямоугольного треугольника*** *можно предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 115, а затем письменно решить задачи 116 и 117. Задачи 106–108 полностью совпадают с выше приведенными задачами 4–6.*

### Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 62, решить задачу 1(4).; дома — вопросы 1 и 2, задача 1(1, 3).

## Теорема Пифагора.
## Египетский треугольник

### Комментарий для учителя

Изучение теоремы Пифагора позволяет существенно расширить круг геометрических задач, решаемых школьниками, давая им в руки вместе с признаками равенства треугольников и свойствами и признаками четырехугольников достаточно мощный аппарат. При работе над материалом этого пункта следует обратить внимание на вопросы для повторения 4 и 5. Ответы на эти вопросы предусматривают доказательства следствий из теоремы Пифагора. Однако, при отсутствии доказательств в учебнике эти вопросы фактически представляют собой задачи. Поэтому следует провести доказательства в классе сразу после доказательства теоремы Пифагора и записать их в тетрадях.

**Текущие результаты** изучения пункта 63. Учащиеся должны:

– *изображать и выделять* из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теорему *Пифагора*;

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы *Пифагора* и следствий из нее;

– *доказывать* теорему *Пифагора* и следствия из нее;

– *решать* задачи с использованием *теоремы Пифагора*, свойств прямоугольного треугольника и свойств четырехугольников, применять обратную теорему Пифагора для определения вида треугольника.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Перед доказательством *теоремы Пифагора* полезно повторить с учащимися основное свойство пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $ad = bc$.

**2°.** Изучение *теоремы Пифагора* (теорема 7.2) начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 88. Сначала необходимо обратить внимание учащихся на то, что в формулировке теоремы есть ровно одно условие ($ABC$ — прямоугольный треугольник) и этого условия достаточно, чтобы выразить гипотенузу через катеты.

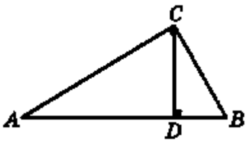


Рис. 88

Дано: $ABC$ — прямоугольный треугольник; $\angle C$ — прямой

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Доказательство теоремы, как правило, не вызывает трудностей у учащихся. Для того чтобы учащиеся лучше поняли доказательство *теоремы Пифагора* по ходу доказательства полезно сделать его краткую запись на доске:

| Краткая запись | Комментарий |
|---|---|
| 1. Дополнительное построение: $CD \perp AB$. | Сначала выполняется дополнительное построение: в прямоугольном треугольнике $ABC$ проводится высота $CD$. |
| 2. $\cos A = \frac{AD}{AC}$ из прямоугольного треугольника $ADC$;<br>3. $\cos A = \frac{AC}{AB}$ из прямоугольного треугольника $ABC$; | Острый угол $A$ одновременно является острым углом двух прямоугольных треугольников $ACD$ ($\angle D$ — прямой по построению) и $ABC$. |
| 4. $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$; $AC^2 = AD \cdot AB$; | Приравниваем правые части полученных равенств. |
| 5. $\cos B = \frac{BD}{BC}$ из прямоугольного треугольника $CBD$;<br>6. $\cos B = \frac{BC}{AB}$ из прямоугольного треугольника $ABC$; | Острый угол $B$ одновременно является острым углом двух прямоугольных треугольников $CBD$ ($\angle D$ — прямой по построению) и $ABC$. |

| **Краткая запись** | **Комментарий** |
|---|---|
| 7. $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$, $BC^2 = DB \cdot AB$. | Приравниваем правые части полученных равенств. |
| 8. <u>Вывод:</u> $AB^2 = AC^2 + BC^2$. | Складываем полученные равенства. |

**3°. Для закрепления теоремы можно предложить учащимся устно решить задачи 2(2) и 3(2) из учебника.**

**В учебнике приведены два <u>следствия</u> из *теоремы Пифагора* без доказательств, но вопросы для повторения требуют знать их доказательства. Поэтому следует предложить их в качестве задач на закрепление *теоремы Пифагора* с записью решения в тетради.**

**<u>Следствие 1</u>. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.**

**<u>Решение</u>. Так как $\Delta ABC$ — прямоугольный, то по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Так как $BC^2 > 0$, то $AC^2 < AB^2$, то есть $AC < AB$. Для катета $BC$ доказательство аналогично, следовательно, $AB > BC$; $AB > AC$.**

**<u>Следствие 2.</u> Для любого острого угла $a$ $\cos a < 1$.**

**<u>Решение</u>. По определению косинуса $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$. Но следствие 1 утверждает, что $AC < AB$, значит, дробь меньше 1.**

**После доказательства следствий из *теоремы Пифагора* следует разобрать по тексту учебника решение задачи 11, обращая при этом внимание учащихся на доказательство того факта, что треугольник $ACD$ — прямоугольный.**

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* ***теоремы Пифагора****. Затем после решения задач 1(2) и 2(2) из учебника можно предложить учащимся разобрать по тексту тетради доказательство <u>следствия 1</u> (задача 118) и оформить письменно доказательство <u>следствия 2</u> (задача 119). Задачи 120 и 121 направлены на прямое применение* ***теоремы Пифагора****. В задачах 120–122 с помощью* ***теоремы Пифагора*** *выясняются соотношения между элементами квадрата. В задачах 123–128 для применения* ***теоремы Пифагора*** *используются более сложные конфигурации, связанные с окружностью. При решении задачи 129 следует применить <u>следствие 1</u>. Часть задач из рабочей тетради вынесена в дополнительные задачи.*

4°. Предложить учащимся пункт «Египетский треугольник» для самостоятельной работы на уроке. На сформулированное в условии задачи 17 утверждение следует обратить внимание учащихся, его в дальнейшем можно использовать при решении задач.

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 63, решить задачи 2(2), 3(2) и 11 из учебника; дома — вопросы 3–5, задачи 2(3), 3(3), 6(2) и 7.

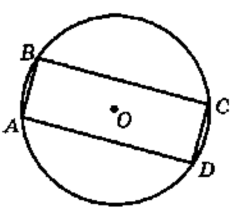
На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 64, провести самостоятельную работу, решить задачи 5, 15 и 17 из учебника; дома — задачи 4, 8, 13 и 18.

## Самостоятельная работа по теме: «Теорема Пифагора».

Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

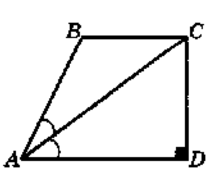
В зависимости от уровня класса, возможно, нужно дать небольшую рекомендацию: В задании 4 обоих вариантов необходимо, используя обратную теорему Пифагора, определить вид треугольника, как прямоугольный, а затем уже найти длину искомого отрезка.

*1-й вариант*




2. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 7 см и 24 см.

*Ответ:* ____________________



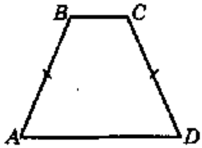

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D$ — прямой) диагональ $AC$ является биссектрисой угла $A$. Боковые стороны равны 17 см и 8 см. Найдите большее основание трапеции.

*Ответ:* ____________________

**4.** Диагонали $AC$ и $BD$ параллелограмма $ABCD$ равны 16 см и 30 см, а сторона $AB$ равна 17 см. Найдите сторону $BC$.

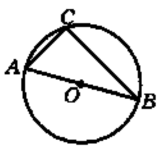
*Ответ:* ______________________

*2-й вариант*



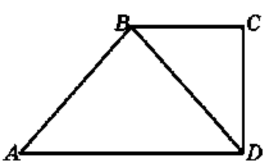
1. Найдите высоту равнобокой трапеции, если длины ее оснований равны 11 см и 23 см, а длина боковой стороны — 10 см.

*Ответ:* 1. 6 см; 2. 8 см; 3. $2\sqrt{11}$ см; 4. $2\sqrt{34}$ см.



2. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны 12 см и 7 см.

*Ответ:* ______________________



3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle C$ — прямой) диагональ $BD$ делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Найдите сторону $CD$ трапеции, если её основание $AD$ равно 8.

*Ответ:* ______________________

**4.** Диагонали $AC$ и $BD$ параллелограмма $ABCD$ равны 6 см и 8 см, а сторона $AB$ равна 5 см. Найдите сторону $BC$.

*Ответ:* ______________________

## Указания к решению задач

При решении задачи 5 заметим, что если стороны пропорциональны числам 5, 6, 7, то их можно обозначить $5a$, $6a$, $7a$. Предположим, что это стороны прямоугольного треугольника, тогда $(7a)^2 = (5a)^2 + (6a)^2$, отсюда $25a^2 + 36a^2 = 61a^2$, с другой стороны $(7a)^2 = 49a^2$, но $61a^2 \neq 49a^2$. Значит, стороны треугольника, пропорциональные числам 5, 6, 7, не могут быть сторонами прямоугольного треугольника.

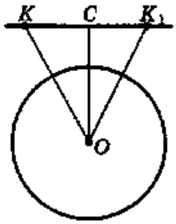


Рис. 89

Условие задачи 12 перед решением полезно прокомментировать. Проведем исследование: космонавты видят друг друга, если между ними нет никакого препятствия. А что в космосе может быть препятствием? — Только Земля. Значит, если прямая, соединяющая два космических корабля находится над поверхностью Земли, то космонавты видят друг друга. А теперь перейдем на язык геометрии. Пусть $K$ и $K_1$ — два космических корабля. Центр Земли обозначим точкой $O$. Тогда получится равнобедренный треугольник $KOK_1$. И если его основание $KK_1$ находится на расстоянии равном или большем, чем радиус окружности, то космонавты видят друг друга. Расстоянием от центра Земли до линии $KK_1$ является высота $OC$. Отсюда, $OC^2 = OK^2 - KC^2$; $OC \approx 6507$ км, $OC$ больше радиуса Земли, значит, что космонавты видят друг друга.

## Дополнительные задачи

**1.** Найдите отношение диагонали квадрата к его стороне.

**2.** К окружности радиуса 10 см проведена касательная, на которой взята точка $M$ на расстоянии 24 см от точки касания. Найдите расстояние от точки $M$ до центра окружности.

**3.** Из точки $M$, отстоящей от центра окружности на расстоянии 29 см, проведена касательная $KM = 21$ см, где $K$ — точки касания. Найдите радиус окружности.

**4.** В окружности радиуса 17 см проведена хорда, равная 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

**5.** Две окружности, радиусы которых равны 20 см и 5 см, касаются внешним образом и имеют общую касательную $AB$. Найдите длину отрезка $AB$.

**6.** Докажите, что в тупоугольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

**7.** Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

# Перпендикуляр и наклонная

## Комментарий для учителя

В этом пункте вводятся определения *наклонной к прямой* и *проекции наклонной*. Используемое здесь понятие *перпендикуляра к прямой* было дано в § 2 учебника. Его необходимо с учащимися повторить. Кроме того, следует подчеркнуть, что *перпендикуляр к прямой, наклонная к прямой и проекция наклонной* являются отрезками. Следствие из теоремы Пифагора, сформулированное для перпендикуляра и наклонных, состоит из трех отдельных утверждений.

При работе над материалом этого пункта следует обратить внимание на вопрос для повторения 6. Как и в случае вопросов 4 и 5 необходимо в классе рассмотреть все три доказательства утверждений следствия.

**Текущие результаты** изучения пункта 65. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках наклонную к прямой и проекции наклонной;

– *объяснять понятия*: *«наклонная к прямой»*, *«проекция наклонной»*;

– *формулировать* и доказывать следствие из теоремы Пифагора о *перпендикуляре к прямой, наклонной к прямой и проекции наклонной*;

– *решать* задачи с использованием *теоремы Пифагора*, и следствий из неё, свойств прямоугольного треугольника, свойств четырехугольников.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Определения *перпендикуляра* к прямой было дано в § 2 учебника. Его необходимо повторить, зафиксировав внимание учащихся на том, что *перпендикуляр* к прямой — это отрезок прямой.

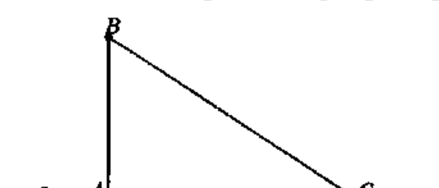


*Рис. 90*

Понятие, *наклонной и проекции наклонной* вводится на наглядном уровне. Проведем прямую $a$, из точки $B$ опустим на прямую $a$ *перпендикуляр* $BA$. Отметим на прямой $a$ точку $C$, отличную от точки $A$ (рис. 90).

После введения *определений наклонной и проекции наклонной* следует подчеркнуть, что, как и *перпендикуляр, наклонная и ее проекция* являются отрезками.

2°. *Следствие из теоремы Пифагора*, сформулированное для *перпендикуляра и наклонных*, целесообразно разделить на три отдельных утверждения, которые можно предложить учащимся в качестве задач для решения.

Следствие 3. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная больше перпендикуляра.

Это просто другая формулировка следствия 1. Для доказательства достаточно указать, что перпендикуляр—это катет, а наклонная — гипотенуза в прямоугольном треугольнике.

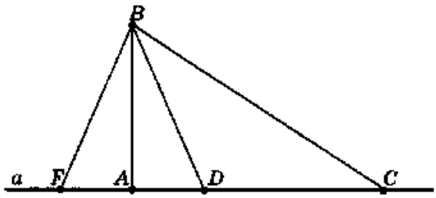


*Рис. 91*

Следствие 4. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то равные наклонные имеют равные проекции (рис. 91).

Доказательство. Из прямоугольного треугольника $BAD$ ($\angle A$ — прямой) по *теореме Пифагора*: $AD^2 = BD^2 - AB^2$, а из прямоугольного треугольника $BAF$ ($\angle A$ — прямой) по *теореме Пифагора*: $AF^2 = BF^2 - AB^2$, а так как по условию $BD = BF$, то и $AD = AF$.

Следствие 5. Если к прямой из одной точки проведены две наклонные, то больше из них та, у которой проекция больше (рис. 91).

Доказательство. Из прямоугольного треугольника $BAC$ ($\angle A$ — прямой) по *теореме Пифагора*: $BC^2 = AC^2 + AB^2$, а из прямоугольного треугольника $BAF$ ($\angle A$ — прямой) по *теореме Пифагора*: $BF^2 = AF^2 + AB^2$, а так как по условию $AC > AF$, то и $BC > BF$.

Доказательства всех следствий просты и могут быть проведены учащимися самостоятельно.

3°. В учебнике, как пример применения следствия из *теоремы Пифагора*, сформулированного для *перпендикуляра и наклонных*, рассматривается решение задачи 19, которое можно разобрать по тексту учебника с активным привлечением учащихся.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать решения задач 122–124, в которых даны следствия из теоремы Пифагора, сформулированные для* ***перпендикуляра и наклонных.***

*Задачи 125–127 направлены на усвоение терминологии, связанной с понятиями **перпендикуляра, наклонной и проекции наклонной** и на повторение свойств прямоугольных треугольников, у которых один из острых углов равен 30° или 45°. Знание этих свойств будет полезно при изучении темы «Соотношения между сторонами и углами в прямоугольных треугольниках». Поэтому эти задачи даны в разделе «Дополнительные задачи» № 1–3.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 65, решить задачи 19, 22 из учебника; дома — вопрос 6, задачи 20, 21.

## Указания к решению задач

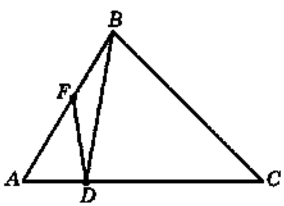


Рис. 92

При решении задачи 20 используется теоретический результат, полученный в задаче 19: отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, взятой на противолежащей стороне, меньше, по крайней мере, одной из сторон этого треугольника, прилежащих к этой вершине.

Пусть $F \in AB$, $D \in AC$ (рис. 92). Соединим точки $D$ и $F$, $D$ и $B$. В треугольнике $ABD$ по доказанному в задаче 19 отрезок $FD$ меньше либо $AD$ либо $BD$. Если $FD$ меньше $DB$, а в силу доказанного в задаче 19: $DB$ меньше либо $AB$ либо $BC$, то и $FD$ меньше либо $AB$ либо $BC$. Если $FD$ меньше $AB$, то он и подавно меньше $AC$.

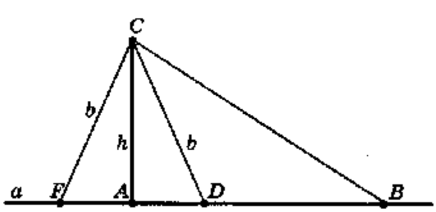


Рис. 92, а

При обосновании существования двух равных наклонных в решении задачи 21 используется метод построения: по высоте $h$ и боковой стороне $b$ $(b > h)$ построить равнобедренный треугольник. Такой равнобедренный треугольник можно построить: сначала строим две перпендикулярные прямые, на одной из них от точки пересечения откладываем высоту $h$, получаем точку $C$, а затем из точки $C$ раствором циркуля, равным, $b$ делаем две засечки на прямой, перпендикулярной высоте треугольника, получаем две вершины $F$ и $D$ (рис. 92, *а*).

Предположим, что можно провести еще одну наклонную $CB$, равную $CF$ и $CD$ (рис. 92). По следствию из теоремы *Пифагора* равные наклонные имеют равные проекции. Проекция наклонной $CB$ лежит или на луче $AD$, либо на луче $AF$. По аксиоме откладывания отрезков на луче можно отложить от его начала только один отрезок данной длины. Значит, точка $B$ совпадает или с точкой $D$, или с точкой $F$. Следовательно, из точки $C$, расположенной вне данной прямой, нельзя провести к этой прямой трех наклонных равной длины.

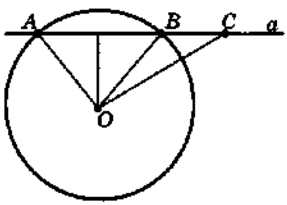



*Рис. 93*

При решении задачи 22 следует рассмотреть на наглядном уровне возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности. Прямая и окружность не пересекаются, значит, радиус окружности меньше расстояния от центра окружности до прямой. Прямая и окружность имеют по определению одну общую точку, значит прямая касается окружности. Прямая и окружность имеют две общие точки, значит, радиус окружности больше расстояния от центра окружности до прямой. Доказательство вытекает из *следствия из теоремы Пифагора*, сформулированного для *перпендикуляра и наклонных*. Предположим, что у окружностии прямой три общие точки: $A$, $B$ и $C$. Тогда, $AO = OB = OC$ как радиусы окружности, а треугольники $AOB$ и $BOC$ равнобедренные с основаниями $AB$ и $BC$ соответственно. Проведем в треугольниках $AOB$ и $BOC$ высоты. Они перпендикулярны основаниям, а значит, перпендикулярны прямой $a$. Но из точки $O$ можно к прямой $a$ можно провести единственный перпендикуляр. Значит, наше предположение неверно: окружность и прямая не могут пересекаться более чем в двух точках.

### Дополнительные задачи

**1.** К прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, которая образует с данной прямой угол, равный 45°. Найдите перпендикуляр, если проекция наклонной равна 11 см.

**2.** К прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, которая образует с данной прямой угол, равный 30°. Найдите перпендикуляр, если наклонная равна 18 см.

**3.** К прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, которая образует с данной прямой угол, равный 60°. Найдите проекцию наклонной, если наклонная равна 16 см.

## Неравенство треугольника

### Комментарий для учителя

В этом пункте уточняется понятие расстояния между точками, доказывается теорема 7.3. Среди задач, рекомендованных к этому пункту, значительную часть составляют задачи на доказательство. Среди них много задач, которые могут быть решены различными способами в зависимости от того, какой теоретический материал используется при их решении. Такие задачи полезно решать в классе, привлекая к их решению учащихся, рассматривая одновременно несколько способов их решения.

**Текущие результаты изучения пункта 66.** Учащиеся должны:

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы о *неравенстве треугольника*;

– *решать* задачи на вычисление и доказательство, применяя *неравенство треугольника* и используя свойства и признаки треугольников, четырехугольников и окружности.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Перед началом рассмотрения *неравенства треугольника* следует повторить *аксиомы расположения точек на прямой* и *аксиомы измерения отрезков*.

Из курса VII класса (§ 1, пункт 4) учащиеся знакомы с понятием расстояния между двумя (различными) точками. Это расстояние — длина отрезка, соединяющего эти точки, и по аксиоме III оно положительно. Теперь понятие расстояния распространяется и на случай, когда точки совпадают. По определению расстояние между совпадающими точками равно нулю.

**2°.** Как всегда изучение утверждения, требующего доказательства, начинается с анализа его формулировки. Формулировка теоремы о *неравенстве треугольника* (теорема 7.3) начинается словами: «Каковы бы ни были три точки, ...», что позволяет сделать вывод, что при доказательстве теоремы необходимо перебрать все возможных случаи расположения трех точек на плоскости:

а) все три точки совпадают (рис. 94 а);

б) две из трех точек совпадают (рис. 94 б);

в) три различные точки лежат на одной прямой (рис. 94 в);

г) три различные точки (рис. 94 г).

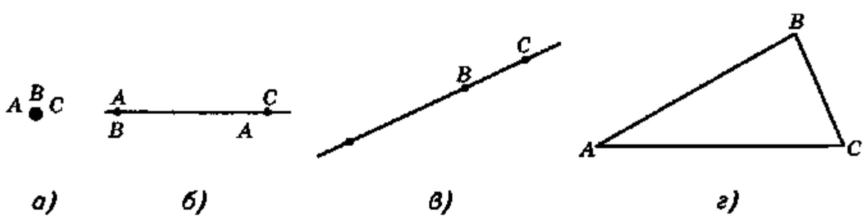



Рис. 94

Доказательство теоремы для первых двух случаев в учебнике опущено.

а) Точки $A$, $B$ и $C$ совпадают (рис. 94 а). Значит, $AB = BC = AC = 0$ (рис. 94 а).

б) Точки $A$ и $B$ совпадают (рис. 94 б). Значит, $AB = 0$, а два других отрезка равны между собой $BC = AC$, отсюда: $AB < AC + BC$, $BC \leq AB + AC$, $AC \leq AB + BC$ (рис. 94 б).

Следовательно, в обоих случаях каждое расстояние не больше суммы двух других.

в) Три точки $A$, $B$ и $C$ различны и лежат на одной прямой (рис. 94 в). Доказательство в этом случае следует из *аксиомы расположения точек на прямой* и *аксиомы измерения отрезков*. Пусть точка $B$ лежит между двумя другими точками $A$ и $C$, отсюда, $AC = AB + BC$. Так как $AB$ и $BC$ положительны, то каждое из них меньше $AC$. Тем более $AB < AC + BC$ и $BC < AC + AB$. Таким образом, каждое из трех расстояний не больше суммы двух других.

г) Три точки $A$, $B$ и $C$ различны и не лежат на одной прямой (рис. 94 г). Для определенности докажем, что $AC < AB + BC$. Опустим из точки $B$ перпендикуляр $BD$ на прямую $AC$ (рис. 95 а). Тогда три точки $A$, $C$ и $D$ лежат на одной прямой и независимо от того, как они на ней расположены, различные они или какие-нибудь две из них совпадают (рис. 95 б), для них доказано, что $AC \le AD + CD$. В прямоугольных треугольниках $BAD$ и $CBD$ катет меньше гипотенузы: $AD < AB$, $DC < CB$, значит, $AD + DC < AB + CB$, $AC < AB + CB$. Доказательства для отрезков $AB$ и $BC$ аналогичны. Таким образом, каждое из трех расстояний не больше суммы двух других.


*а) б)*

*Рис. 95*

Следовательно, для случая, когда три точки на плоскости не лежат на одной прямой и определяют треугольник, выполняется строгое неравенство. В учебнике для этого случая приводится формулировка: «*в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон*».

При объяснении домашнего задания следует обратить внимание учащихся на то, что в разделе учебника «Контрольные вопросы» наряду с вопросом: «*Докажите неравенство треугольника*», который предполагает доказательство утверждения теоремы для всех случаев расположения трех точек, содержится вопрос: «*Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон*», предполагающий доказательство строгого неравенства для сторон треугольника (вопрос 7), который содержится в доказательстве теоремы 7.3.

**3°.** Для закрепления теоремы можно предложить учащимся устно решить задачи:

> 1. Существует ли треугольник со сторонами 13 см, 4 см, 8 см.
> 2. Стороны равнобедренного треугольника равны 10 см и 4 см. Какая их них является основанием?

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* ***неравенства треугольника*** *и разобрать решение задачи 128 по тексту тетради. Задачу 129 следует решить после решения задачи 41 из учебника.*

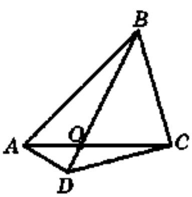



*Рис. 96*

**4°.** На втором уроке необходимо прокомментировать задачи домашнего задания:

в <u>задаче **28**</u> следует сделать дополнительное построение: продлить медиану треугольника за точку ее пересечения с третьей стороной треугольника и отложить отрезок, равный медиане;

в <u>задаче **29**</u> для доказательства первой части *«сумма диагоналей четырехугольника ...меньше периметра»* следует выразить диагональ $AC$ из двух треугольников $ACD$ и $ACB$, а диагональ $DB$ из двух треугольников $ABD$ и $CBD$; для доказательства второй части *« сумма диагоналей четырехугольника ...больше полупериметра»* следует рассмотреть треугольники: $AOD$, $BOC$, $COD$ и $BOA$.

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пункта **66**, решить задачи **23**, **24(1)**, **26** и **27** из учебника; <u>дома</u> — вопрос **7** и **8**, задачи **24(2)**, **32**, **33**.

На втором уроке: в <u>классе</u>—провести самостоятельную работу, решить задачи **40**, **41**, **42(1, 2)**; <u>дома</u>—задачи **25**, **28**, **29**, **42(3)**.

На третьем уроке: в <u>классе</u>— решить задачи **34**, **35**, **36**, **37**, **38**, **39**; <u>дома</u>—задачи **30**, **42(4)**, **43**.

## Самостоятельная работа по теме: «Перпендикуляр и наклонная». «Неравенство треугольника»

*1-й вариант*

**1°.** К прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная. Проекция наклонной равна 11 см. Найдите длину перпендикуляра, если наклонная образует с данной прямой угол, равный 45°.

**2°.** Определите, существует ли треугольник, стороны которого относятся как 3 : 3 : 7?

**3.** Докажите, что в трапеции сумма диагоналей больше суммы оснований.

*2-й вариант*

**1°.** К прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная. Наклонная равна 18 см и образует с данной прямой угол, равный 30°. Найдите перпендикуляр.

**2°.** Две окружности равных радиусов с центрами в точках $O$ и $O_1$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Одна сторона треугольника $AOO_1$ равна 13 см, другая 6 см. Определите расстояние между центрами окружностей.

**3.** Докажите, что в трапеции сумма боковых сторон больше разности оснований.

## Указания к задачам

Никакие точки из трех точек, данных в задаче 24, не совпадают, так как ни одно расстояние не равно нулю. Предположим, что точки не лежат на одной прямой. Тогда они являются вершинами некоторого треугольника $ABC$. По *неравенству треугольника* каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон: $AC<AB+BC$ и $BC<AB+AC$. Но по условию задачи 1) $12 = 5 + 7$, т.е. $AC = AB+BC$, пришли к противоречию; 2) $17,1 = 10,7 + 6,4$, т.е. $BC = AB+AC$, пришли к противоречию.

Значит, точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

Для решения задачи 34 (рис. 97):

1) предположим, что наибольшее расстояние от данной точки $M$ до точек окружности равно $ML_1$, тогда из треугольника $MOL_1$ получим $ML_1 < R + d$, а $ML = R + d$. Отсюда $ML_1 < ML$.

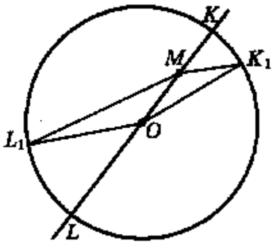



Рис. 97

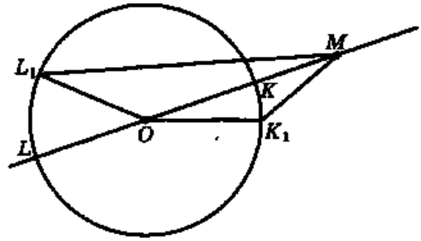



Рис. 98

2) предположим, что наименьшее расстояние от данной точки $M$ до точек окружности равно $MK_1$, тогда из треугольника $MOK_1$ получим $MK_1 > R - d$, а $MK = R - d$. Отсюда $MK < MK_1$.

Решения задач 35–37 аналогичны решению задачи 34.

Решение задачи 35 следует из рассмотрения треугольников $MOL_1$ и $MOK_1$ (рис. 98).

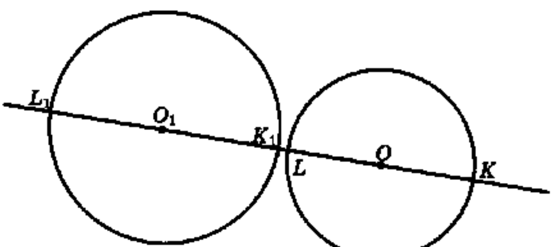



Рис. 99

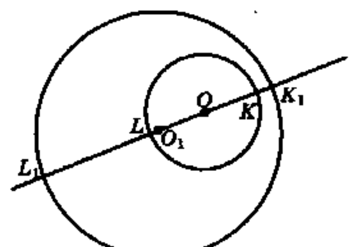



Рис. 100

В задаче 36 точка $O$ центр меньшей окружности находится вне большей окружности с центром в точке $O_1$ (рис. 99), так как по доказанному в задаче 35 наименьшее расстояние до большей окружности равно $OK_1$, которое по данным задачи больше меньшего радиуса: $OK_1 = OO_1 - O_1K_1$.

В задаче 37 точка $O$ центр меньшей окружности находится внутри большей окружности с центром в точке $O_1$ (рис. 100), так как по доказанному в задаче 34 наименьшее расстояние до большей окружности равно $OK_1$, которое по данным задачи больше меньшего радиуса: $OK_1 = O_1K_1 - OO_1$.

<u>Задача 40</u>. 1) В силу условия $c \geq b$ следует $c^2 \geq b^2 \Rightarrow c^2 + a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} > 0.$

Далее: $a + b > c \Rightarrow c - a < b \Rightarrow (c - a)^2 < b^2 \Rightarrow c^2 + a^2 - b^2 < 2ac \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a.$

2) Отрезок $BD$ имеет длину $\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ и, значит, в силу доказанного в первой части задачи $\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$, поэтому можно построить прямоугольный треугольник $BDC$ ($\angle D$ — прямой), который в силу признака равенства прямоугольных треугольников является единственным (рис. 101).

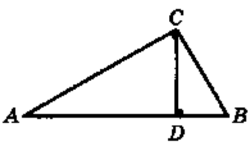


Рис. 101

3) Во второй части построен прямоугольный треугольник $BDC$. Продолжим в построенном треугольнике сторону $BD$ за точку $D$ и на луче $BD$ отложим от точки $B$ отрезок $BA$, равный $c$.

$$AD = c - BD = c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$ Тогда

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right)^2 =$$

$$= a^2 + \frac{(c^2 - a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - b^2)\cdot(c^2 - a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2}{4c^2} =$$

$$= a^2 + \frac{2c^2 \cdot 2(b^2 - a^2)}{4c^2} = a^2 + b^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow AC = b.$$

<u>Задача 41</u>. Без ограничения общности можно предположить, что число $a$ — наименьшее, а число $c$ — наибольшее из трех чисел $a$, $b$ и $c$. Это означает, что $0 < a \leq b \leq c$. Кроме того, $c < a + b$ и значит задача сводится к задаче 40, что означает, что существует треугольник $ABC$ со сторонами $BC = a$, $AB = c$ и $AC = b$.

## Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

### Комментарий для учителя

В этом пункте вводятся определения: синуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника, позволяющие по стороне и острому углу прямоугольного треугольника находить другие стороны. Этот материал служит пропедевтикой к теме девятого класса «Решение треугольников». Кроме того, как косинус острого угла зависит только от градусной меры угла, аналогично доказывается, что и *синус*, *тангенс* и *котангенс* так же зависят только от градусной меры угла. Наконец, здесь выводятся правила нахождения катетов, используя определения синуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника, а также формулы, позволяющие выразить *тангенс* и *котангенс острого угла* через его *синус* и *косинус* того же угла.

Среди задач, рекомендованных к этому пункту, значительную часть составляют задачи, в которых требуется определить угол по его тригонометрическим функциям или найти тригонометрические функции данного угла. При этом рекомендуется использовать калькулятор.

**Текущие результаты** изучения пункта 67. Учащиеся должны:

– *доказывать* зависимость *синуса, тангенса* и *котангенса* от градусной меры угла;

– *выводить* правила нахождения катетов, формулы, позволяющие выразить *тангенс* и *котангенс острого угла* через *синус* и *косинус* того же угла;

– *объяснять* термины *«синус»*, *«тангенс»* и *«котангенс»*;

– *решать* задачи на нахождение элементов прямоугольного треугольника, применяя определения косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и следствия из нее, ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур.

### Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** При введении определения *синуса острого угла прямоугольного треугольника* полезно обратить внимание учащихся на то, что, если в условии сказано: *«... синус острого угла прямо-*

*угольного треугольника равен ...»*, то это означает, что задано отношение противолежащего данному углу катета и гипотенузы. При введении определения *тангенса острого угла прямоугольного треугольника* условие: «... *тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен* ...», — означает, что задано отношение противолежащего данному углу катета к прилежащему катету. А при введении определения *котангенса острого угла прямоугольного треугольника* условие: «... *котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен* ...», — означает, что задано отношение прилежащего к данному углу катета к противолежащему катету.

*Синус, косинус, тангенс* и *котангенс острого угла* определяются, как отношения сторон конкретного *острого угла* конкретного *прямоугольного* треугольника. В дальнейшем при решении задач удобнее применять определения *синуса, косинуса, тангенса* и *котангенса острого угла*, данные в вербальной форме: «*Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе*»; «*Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе*»; «*Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего данному углу катета к прилежащему катету*»; «*Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего данному углу катета к противолежащему катету*». При этом следует подчеркнуть, что, как и определение *косинуса острого угла прямоугольного треугольника*, так и введенные определения *синуса острого угла*, *тангенса острого угла* и *котангенса острого угла* относятся именно к углу *острому* и к треугольнику *прямоугольному*.

После введения определений *синуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника*, данного в учебнике, на формирование умения *применять это определение* можно предложить учащимся выполнить устно упражнения по готовым чертежам:

> 1. Дан прямоугольный треугольник $ABC$. По данным рисунка 102 выразите а) $\sin A$ и $\sin B$; б) $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{tg} B$; в) $\operatorname{ctg} A$ и $\operatorname{ctg} B$ через стороны прямоугольного треугольника $ABC$.

**2.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см, а синус одного из острых углов равен 0,7. Чему равен катет, противолежащий данному острому углу?

**3.** На сторонах угла $B_3OA_3$ отложены отрезки $OB_1 = 5$ см, $OB_2 = 6{,}25$ см, $OB_3 = 8$ см (рис. 103). Из точек $B_1$, $B_2$ и $B_3$ опущены перпендикуляры на другую сторону угла, причем $OA_1 = 3$ см, $OA_2 = 3{,}75$ см, $OA_3 = 5{,}8$ см. Найдите $\sin O$; $\operatorname{tg} O$ и $\operatorname{ctg} O$ из: а)$\Delta A_1OB_1$, б) из $\Delta A_2OB_2$, $\Delta A_3OB_3$.

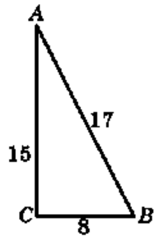



*Рис 102*

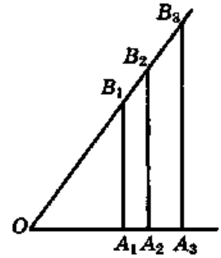



*Рис. 103*

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определений* ***синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника*** *и устно выполнить задания 130 и 131, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1 и 2. Цель их выполнения та же, сформировать умение* ***применять*** *введенные* ***определения****.*

**2°.** В результате решения выше приведенной задачи 3, в которой значение *синуса, тангенса* и *котангенса острого угла О прямоугольного треугольника* находили из разных прямоугольных треугольников, можно сделать вывод, что значения *синуса, тангенса* и *котангенса острого угла О прямоугольного треугольника* не зависят от выбора прямоугольного треугольника. Во всех случаях результат получился один и тот же, хотя размеры треугольников были различны. Отсюда следует, что справедливо утверждение: *«Если в двух прямоугольных треугольниках острые углы равны, то синусы, тангенсы* и *котангенсы этих углов равны»*. Эта формулировка равноценна формулировке, приведенной в учебнике.

**3°.** Доказательство утверждения о зависимости *синуса, тангенса* и *котангенса острого угла прямоугольного треугольника* только от градусной меры угла несложное и не должно вызвать затруднений у учащихся. Вся сложность доказательства заключается в алгебраических выкладках, поэтому полезно записать их подробнее, чем это сделано в учебнике.

**4°.** В пункте выводятся формулы, позволяющие выразить *тангенс* и *котангенс острого угла* через его *синус* и *косинус*: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Эти формулы будут применяться при выводе основных тригонометрических тождеств. Поэтому учащиеся должны их запомнить.

**5°.** В этом пункте сформулированы правила, позволяющие по стороне и острому углу прямоугольного треугольника находить другие стороны. Эти правила полезно предложить учащимся вывести самостоятельно, пользуясь определениями синуса, косинуса и тангенса острого угла (задачи 45–47 из учебника). Вместе с теоремой Пифагора они дают полный инструментарий для решения прямоугольных треугольников, т.е., зная две стороны или сторону и острый угол прямоугольного треугольника, можно найти остальные его элементы. Однако основное внимание следует все же уделить усвоению учащимися определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла. Уверенное владение этими определениями позволит учащимся не только легко восстановить в памяти указанные в учебнике правила нахождения сторон прямоугольного треугольника, но и получить другие следствия, например, вычислить гипотенузу по катету и острому углу. На рисунке 104 эти правила представлены в виде плаката:

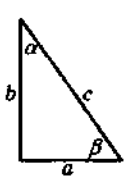
| | | | |
|---|---|---|---|
| <br> | $c^2 = a^2 + b^2$<br>$c = \dfrac{a}{\cos\beta}$;<br>$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$;<br>$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$;<br>$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. | $a^2 = c^2 - b^2$<br>$a = c \cdot \sin\alpha$;<br>$a = c \cdot \cos\beta$;<br>$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$;<br>$a = \dfrac{b}{\mathrm{tg}\beta}$.<br>$a = b \cdot \mathrm{ctg}\beta$;<br>$a = \dfrac{b}{\mathrm{ctg}\alpha}$ | $b^2 = c^2 - a^2$<br>$b = c \cdot \sin\beta$;<br>$b = c \cdot \cos\alpha$;<br>$b = a \cdot \mathrm{tg}\beta$;<br>$b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$<br>$b = a \cdot \mathrm{ctg}\alpha$;<br>$b = \dfrac{a}{\mathrm{ctg}\beta}$. |

*Рис. 104*

***В рабочей тетради правила нахождения сторон прямоугольного треугольника представлены в виде таблицы, аналогичной выше приведенному эскизу плаката.***

**6°.** Формирование умений пользоваться таблицами для нахождения *синуса*, *косинуса*, *тангенса* и *котангенса* острого угла по значению какой-либо из указанных тригонометрических функций не предусмотрено программой. Поэтому определять значения углов по заданным тригонометрическим функциям или находить углы по их тригонометрическим функциям рекомендуется с помощью калькулятора.

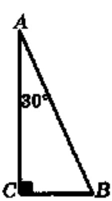
**7°.** На следующем уроке рекомендуется провести вместо проверки домашнего задания самостоятельную работу.

## Примерное планирование изучения материала

На уроке: в <u>классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пункта 67, решить задачи 45, 46, 47 из учебника; <u>дома</u> — вопрос 9 и 10, задачи 53, 60, 61(1, в; 2, б).

## Самостоятельная работа по теме: «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

*1-й вариант*

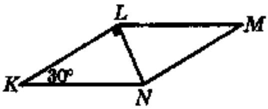



**1.** В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $5\sqrt{3}$ см. Найдите второй катет, если угол, прилежащий к данному катету, равен 30°.

*Ответ:* 1. $5\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ см; 2. $2\sqrt{15}$ см; 3. 5 см; 4. 10 см.

**2.** В треугольнике *ABC* внешний и внутренний углы при вершине *C* равны. Определите, какая из сторон треугольника *ABC* является наибольшей.

*Ответ:* 1. *AB*; 2. *BC*; 3. *AC*; 4. Определить невозможно.

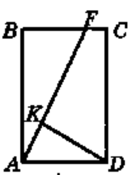



**3.** В параллелограмме $KLMN$ диагональ $LN$ перпендикулярна стороне $KL$. Найдите периметр параллелограмма $KLMN$, если диагональ $LN$ равна $3\sqrt{3}$ см, а угол $LKN$ равен 30°.

*Ответ:* ______________________________

**4.** Диагонали $AC$ и $BD$ параллелограмма $ABCD$ равны 8 см и 6 см, а сторона $AB$ равна 5 см. Определите вид параллелограмма.

1. прямоугольник;
2. ромб;
3. квадрат;
4. определить нельзя.




**5.** На стороне $BC$ прямоугольника $ABCD$ отмечена такая точка $F$, что $\angle FAD = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки $D$ до прямой $AF$, если $AD = \sqrt{3}$.

*Ответ:* ______________________________

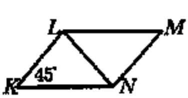
*2-й вариант*


**1.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а острый угол равен 60°. Найдите катет, противолежащий данному углу.

*Ответ:* 1. $5\sqrt{3}$ см; 2. $5\sqrt{5}$ см; 3. 5 см; 4. 3 см.

**2.** В треугольнике $ABC$ сумма градусных мер углов $A$ и $B$ равна градусной мере угла $C$. Определите, какая из сторон треугольника $ABC$ является наибольшей.

*Ответ:* 1. $AC$; 2. $BC$; 3. $AB$; 4. Определить невозможно.

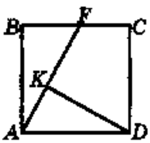



**3.** В параллелограмме $KLMN$ диагональ $LN$ перпендикулярна стороне $KL$. Найдите периметр параллелограмма $KLMN$, если диагональ $LN$ равна $6\sqrt{2}$ см, а угол $LKN$ равен 45°.

*Ответ:* ______________________________

**4.** Стороны параллелограмма равны 24 см и 7 см, а одна из его диагоналей равна 25 см. Определите его вид.

1. прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить нельзя.




**5.** На стороне $BC$ квадрата $ABCD$ отмечена точка $F$ так, что $\angle FAD = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки $D$ до прямой $AF$, если $AB = \sqrt{3}$.

*Ответ:* ____________________

## Основные тригонометрические тождества

### Комментарий для учителя

Здесь учащиеся впервые встречаются с термином «*тригонометрические*» (тождества). Поэтому следует пояснить, что слово «*тригонометрические*» образуется от существительного «*тригонометрия*». Слово «*тригонометрия*»,составленное из двух слов τρίγνωον (тригонон) — треугольник, μετρεω (метрео) — мерю, впервые, насколько известно, появилось в сочинении Бартоломея Питискуса, вышедшем в свет в 1595 г.

**Текущие результаты** изучения пункта 68. Учащиеся должны:

– *выводить* основные тригонометрические тождества;

– *решать* задачи на нахождение значений тригонометрических функций угла по заданному значению одной из них и задачи на преобразование тригонометрических выражений.

### Методические рекомендации к изучению материала

В параграфе рассматриваются три тригонометрических тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Указанные тождества выражают связь между числовыми значениями *косинуса, синуса* и *тангенса острого угла*, определяемыми как соотношения сторон прямоугольного треугольника.

При доказательстве двух последних тождеств используется формула $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, которая была получена при доказательстве утверждения о зависимости синуса и тангенса острого угла только от величины угла.

Значение этих тождеств, как сказано в учебнике, заключается в том, что они позволяют по одной из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ найти другие. Заметим, что на данном этапе обучения не ставится целью формирование умений выполнения тождественных преобразований тригонометческих выражений. Основной материал раздела тригонометрии будет изучаться в курсе алгебры.

Доказательства основных тождеств, данные в учебном пособии, достаточно просты и не требуют специальных разъяснений.

### Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — провести самостоятельную работу; рассмотреть весь теоретический материал пункта 68, решить задачи 62(2, 3, 5), 63(1) из учебника; дома — вопрос 11, задачи 62(1, 4, 6, 7), 63(3), 64(2), 65(4).

## Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

### Комментарий для учителя

Поскольку во всем параграфе 7 большое внимание уделяется вопросам, связанным с формированием умения решать прямоугольные треугольники, то для того, чтобы упростить вычисления в задачах, полезно, чтобы учащиеся запомнили значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°. В этом пункте на основании изученных теорем и определений выводятся эти значения в радикалах.

**Текущие результаты** изучения пункта 69. Учащиеся должны:

– *доказывать* теорему 7.4;

– *находить* значения *синуса*, *косинуса*, *тангенса* и *котангенса* углов **30°**, **45°** и **60°**;

– *решать* задачи на нахождение элементов прямоугольного треугольника, используя значений *синуса*, *косинуса*, *тангенса* и *котангенса* углов **30°**, **45°** и **60°**.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Доказательство теоремы 7.4 достаточно просто, поэтому его можно провести в форме беседы с привлечением учащихся по следующему плану:

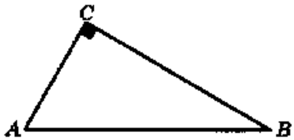



*Рис. 105*

1. В прямоугольном треугольнике $ABC$ (рис. 105):

$\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$. Чему равен угол $B$?

2. Записать значение $\sin\alpha$ и $\cos(90^\circ - \alpha)$ и сделать вывод:

$\frac{BC}{AB} = \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$;

3. Записать значение $\cos\alpha$ и $\sin(90^\circ - \alpha)$;

4. Вывод: $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

**2°.** В процессе вывода формул для функций угла 30° получает второе доказательство известный геометрический факт: катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Этот факт был доказан при решении задачи 43 § 4.

**3°.** Как показывает опыт, полезно иметь в классе таблицу, в которой даны значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов. При этом в расчете на будущее (§ 8), кроме изучаемых в пункте углов 30°, 45° и 60°, в нее могут быть включены значения функций углов 0° и 90°. Такую же таблицу полезно сделать в тетрадях учащихся.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся сформулировать теорему 7.4. По ходу объяснения нового материала заполнить таблицу в задаче 132. Задачи 133–138 дублируют задачи из раздела «Дополнительные задачи», которые можно использовать при подготовке к контрольной работе или при повторении.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 69, решить задачи 67 и 68 из учебника; дома — вопросы 12 и 13, задачи 66, 69, 70.

## Указания к задачам

При решении задачи 51. Целесообразно обсудить с учащимися вопрос совпадения центров вписанной и описанной окружностей. Точка пересечения биссектрис треугольника — центр вписанной окружности, а точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника — центр описанной окружности. В равносторонием треугольнике точки пересечения биссектрис, медиан и высот треугольника совпадают. Задача может быть решена двумя способами.

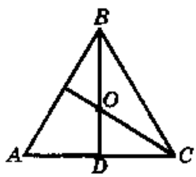



Рис. 106

1-й способ. В равностороннем треугольнике $ABC$ точка $O$ — точка пересечения биссектрис, медиан и высот этого треугольника (рис. 106). Тогда $OB = OC = R$ — радиусы описанной окружности, а $OD = r$ — радиус вписанной окружности. В $\Delta COD$: $CD = \frac{a}{2}$; $\angle OCD = 30°$. Используются определения тангенса и косинуса острого угла и значения для тангенса и косинуса угла, равного 30°.

2-й способ. Это решение опирается на решение задачи 74 из § 6.

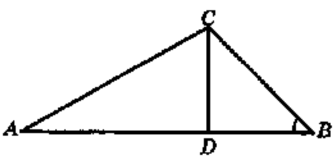



Рис. 107

Задача 69. В $\Delta ABC$: $AB = 1$; $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$. Решение. Проведем из вершины $C$ высоту $CD$ к стороне $AB$. $D$ лежит между точками $A$ и $B$, так как это высота, опущенная из вершины тупого угла:. $\angle C = 105^\circ$. Обозначим длину отрезка $DB$ через $x$. Тогда $AD = 1 - x$. Из $\Delta CDB$ имеем $CD = DB \cdot \mathrm{tg} 45^\circ = x$, а из $\Delta CDA$ имеем $CD = AD \cdot \mathrm{tg}\ 30^\circ = \frac{1-x}{\sqrt{3}}$. Получаем уравнение, из которого находим $x$, а значит и $AC$ и $CB$.

## Дополнительные задачи

**1.** Диагональ ромба равна его стороне и равна 10 см. Вычислите вторую диагональ и углы ромба.

**2.** Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 7 см. Определите сторону треугольника.

**3.** Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 3 см. Определите сторону треугольника.

**4.** Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 4 см. Определите сторону квадрата.

**5.** Углы при основании трапеции равны 45° и 30°, а высота трапеции равна 6 см. Найдите боковые стороны трапеции.

**6.** Угол при основании равнобокой трапеции равен 60°, а боковая сторона равна меньшему основанию и равна 10 см. Чему равна средняя линия трапеции?

**7.** Сторона ромба равна $a$, а один из его углов равен 120°. Чему равны диагонали ромба?

**8.** Диагональ параллелограмма равна $a$ и перпендикулярна его стороне. Чему равны стороны параллелограмма, если угол параллелограмма равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°?

**9.** Одно из оснований трапеции в 2 раза больше другого, а углы при основании равны 90° и 45°. Чему равны боковые стороны трапеции, если меньшее основание равно 12 см?

**10.** Основание трапеции равно 16 см, а углы, прилежащие к нему, равны 90° и 30°. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Чему равна средняя линия трапеции?

## Изменение sinα, cosα, tgα и ctgα при возрастании угла α

### Комментарий для учителя

В этом параграфе доказывается теорема о возрастании sinα и tgα и убывании cosα и ctgα при возрастании острого угла. При работе над этой темой для решения задач теорему 7.5 удобно переформулировать в виде: «Чем больше острый угол, тем больше его синус и тангенс» и «Чем больше острый угол, тем меньше его косинус и котангенс». Доказанное здесь утверждение будет активно применятся в теме «Решение треугольников».

**Текущие результаты** изучения пункта 70. Учащиеся должны:

– *формулировать и объяснять формулировку* теоремы о возрастании $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ и убывании $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ при возрастании острого угла;

– *находить* значения *синуса, косинуса, тангенса* и *котангенса* углов **30°**, **45°** и **60°**;

– *решать* задачи на сравнение градусной меры углов по значениям их соответственных тригонометрическими функций.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Следует обратить внимание учащихся на то, что теорема об изменении синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла (теорема 7.5) состоит из четырех отдельных утверждений:

I. При возрастании острого угла его косинус убывает.

II. При возрастании острого угла его синус возрастает.

III. При возрастании острого угла его котангенс убывает.

IV. При возрастании острого угла его тангенс возрастает.

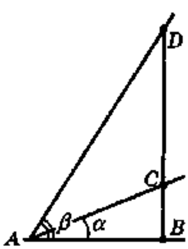



*Рис. 108*

Доказательство теоремы достаточно просто, поэтому его можно провести с привлечением учащихся по следующему плану (рис. 108):

1. Выполнить дополнительное построение: провести $DB \perp AB$;

2. $\alpha < \beta$, луч $AC$ проходит между сторонами угла $DAB$, равного $\beta$;

3. Луч $AC$ пересекает отрезок $BD$ с концами на сторонах угла;

4. $BC<BD$, т.к. точка $C$ лежит между точками $B$ и $D$;

5. $AC < AD$, по свойству наклонных;

I. $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC}$, $\cos\beta = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta$;

II. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} \Rightarrow \sin\alpha < \sin\beta$;

III. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

IV. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$.

**2°.** При решении учащиеся сталкиваются не с изменением острого угла (его возрастанием или убыванием), а с двумя углами, заданными своими градусными мерами. Поэтому для решения задач теорему **7.5** удобно переформулировать в виде:

I. «Из двух углов большему острому углу соответствует меньший косинус».

II «Из двух углов большему острому углу соответствует больший синус».

III «Из двух углов большему острому углу соответствует больший тангенс».

IV «Из двух углов большему острому углу соответствует меньший котангес».

**3°.** На формирование умения *применять доказанную теорему* можно предложить учащимся выполнить устно упражнения **72 (2, 3, 6)**.

## Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 70, решить задачи 72 (2, 3, 6) и 74 из учебника; дома — вопрос 14, задачи 72 (1, 4, 5) и 73.

## Дополнительные задачи

**1.** Из точки $A$ к прямой $a$ проведены две наклонные $AB$ и $AC$, образующие с ней углы $35^\circ$ и $70^\circ$ соответственно. Какая из наклонных имеет большую длину?

**2.** Из точки $A$ проведены к прямой $a$ две наклонные: $AB = 10$ см и $AD = 15$ см. Какая из наклонных образует с прямой $a$ меньший острый угол?

**3.** Докажите, что в остроугольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

# Систематизация и обобщение знаний по теме «Теорема Пифагора»

## Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Теорема Пифагора» учащиеся должны:

– *выделять* из данной конфигурацни прямоугольные треугольники и заданные в условии задачи их элементы и конфигурации;

– *понимать*, в каких ситуациях применима теорема Пифагора;

– *применять* обратную теорему Пифагора для определения вида треугольников;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения косинуса, синуса и тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника и тригонометрические тождества;
- теорему Пифагора и следствия из нее;
- неравенство треугольника;
- ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур;

– *применять* алгебраический метод решения при вычислении элементов прямоугольного треугольника.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме: «Теорема Пифагора» полезно организовать, как урок решения задачи. Для этого можно использовать задачи: 1 (2), 2 (1), 3 (1), 6 (1, 2), 10, 14, 55, 58, 61 (3а, 4г), 74 из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты 8 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение» для § 7 «Теорема Пифагора» рекомендованы тесты 7 и 8, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Первый вариант: итоговый тест по теме можно создать из них, используя часть заданий из каждого теста. При этом полезно включить в него задание 5 из теста 2 и задания 8 из вариантов теста 7, в которых необходимо, используя обратную теорему Пифагора, определить вид треугольника, как прямоугольный, а затем уже найти длину искомого отрезка. Кроме того, полезно разобрать хотя бы одну из десятых задач теста 7, решение которых требует достаточно высокой вычислительной культуры.

Второй вариант: Однако, поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

3°. В контрольной работе первые четыре задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 5–6 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

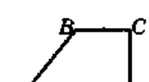
*При использовании в учебном процессе рабочей тетради, ее можно использовать, как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из нерешенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.*

## Контрольная работа по теме: «Теорема Пифагора»

### *1-й вариант*

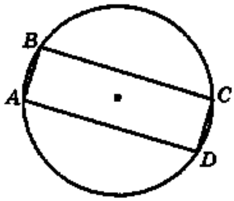
**1.** Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см. Одна из его сторон равна 6 см. Найдите длину боковой стороны.

*Ответ:* 1. 8 см; 2. 6 см; 3. 9 см; 4. 18 см.




**2.** В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D$ — прямой) основания равны 17 см и 9 см, а меньшая боковая сторона равна 15 см. Найдите большую боковую сторону.

*Ответ:* 1. 15 см; 2. 17 см; 3. 9 см; 4. 8 см.




**3.** Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 7 см и 24 см.

*Ответ:* ______________________

**4.** Найдите значение выражения $\sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

*Ответ:* 1. $\frac{\sqrt{6}}{6}$; 2. $\frac{\sqrt{6}}{12}$; 3. $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 4. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

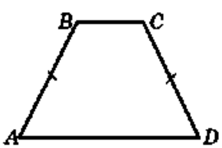
**5.** К двум окружности с центрами в точках $O$ и $O_1$ и радиусами, равными 12 см и 4 см проведена общая касательная $AB$ ($A$ и $B$ — точки касания). Найдите отрезок $AB$, если расстояние между центрами окружностей равно 15 см.

**6.** В треугольнике $ABC$ высота, проведенная из вершины $B$, пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Докажите, что $AB < CB$, если угол $CBD$ больше угла $ABD$.

*2-й вариант*

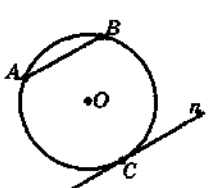
**1.** Из одной точки окружности проведены два отрезка: хорда и радиус. Один отрезок равен 6 см, а другой 12 см. Найдите радиус окружности.

*Ответ:* 1. 8 см; 2. 6 см; 3. 9 см; 4. 12 см.




**2.** Найдите боковую сторону равнобокой трапеции $ABCD$, если длины ее оснований равны 11 см и 27 см, а высота равна 15 см.

*Ответ:* 1. 16 см; 2. 17 см; 3. $\sqrt{481}$ см; 4. $\sqrt{161}$ см.




**3.** Длина хорды $AB$, проведенной в окружности радиуса 25 см, равна 48 см. Найдите расстояние от хорды $AB$ до параллельной ей касательной $n$ ($C$ — точка касания).

*Ответ:* ______________________

**4.** Найдите значение выражения $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$.

*Ответ:* 1. $\frac{1}{4}$; 2. $\frac{3}{4}$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

**5.** К окружности радиуса 20 см проведена касательная, на которой взята точка $M$ на расстоянии 21 см от точки касания $K$. Найдите расстояние от точки $M$ до центра окружности.

**6.** В треугольнике $ABC$ серединный перпендикуляр к стороне $AB$ пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Докажите, что $AC > CB$.

## § 8. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Учебный материал темы «Декартовы координаты на плоскости», многие годы традиционный для курса геометрии, в определенном смысле дублирует аналогичный материал курса алгебры. Содержание темы «Декартовы координаты на плоскости» в курсе геометрии ограничено знакомством учащихся с системой декартовых координат и методом координат. Метод координат позволяет многие геометрические задачи перевести на язык алгебраических формул и уравнений. Задание системы координат определяет положение точки на плоскости парой чисел (координатами), что в свою очередь определяет положение фигур (прямых, окружностей) соответствующими уравнениями, которым удовлетворяют координаты точек этих фигур. Важным этапом применения этого метода является удобный выбор осей координат.

«Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся требование к уровню изучения данной темы формулируются следующим образом: «*Выпускник получит возможность овладеть координатным методом решения задач на вычисления и доказательства*». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако, как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объеме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала решать учителю. При этом урок лучше организовать в форме лекции. Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами применения *координатного метода*: вывода уравнений окружности и прямой.

Метод координат в рамках данного учебника применяется при изучении тем: «Преобразование фигур», «Векторы на плоскости». При изучении этой темы следует уделить основное внимание вопросам вывода формул: координат середины отрезка и расстояния между точками; а также определению синуса, косинуса и тангенса для любого угла от $0^\circ$ до $180^\circ$. Вопросы, связанные с выводом уравнений прямой и окружности, их взаимного расположения и расположения их на плоскости, полностью дублируются в курсе алгебры, поэтому их можно дать в обзорном виде.

Поскольку основной материал данной темы достаточно прост или в значительной степени знаком учащимся, то за основную форму работы на уроке можно принять фронтальную беседу.

Задачный материал в основном направлен на непосредственное закрепление введенных понятий, формул, уравнений. Многие из этих задач решаются чисто аналитически, однако полезно проиллюстрировать их решения на рисунке.

**Планируемые итоговые результаты изучения восьмого параграфа:**

Учащиеся должны научиться:

– *изображать* на чертежах и рисунках систему координат, строить точки по координатам, определять знаки координат конкретных точек;

– *выводить* формулы: для нахождения координат середины отрезка, для вычисления длин отрезков;

– *составлять* уравнения окружности и прямой;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы для нахождения координат середины отрезка;
- формулы для вычисления длин отрезков.

Учащиеся получат возможность научиться:

– *иллюстрировать* и *описывать* положение окружностей и прямых относительно осей координат по их уравнениям;

– *устанавливать* параллельность прямых;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство координатный метод.

## Определение декартовых координат. Координаты середины отрезка

### Комментарий для учителя

В пункте 71 систематизируются знания учащихся о декартовых координатах, полученные ими в процессе изучения алгебры в VII классе. Вывод *формул координат середины отрезка,* приведенный в пункте 72 прост и не требует особых комментариев. Поэтому в методическом плане понятия, вводимые в пунктах 71 и 72 просты и знакомы учащимся. Это позволяет организовать урок в форме беседы.

**Текущие результаты** изучения пунктов 71 и 72. Учащиеся должны:

– *изображать* (*вводить*) на чертежах и рисунках систему координат;

– строить точки по координатам, определять знаки координат конкретных точек;

– *выводить* формулу *координат середины отрезка*;

– *решать* задачи с использованием формулу *координат середины отрезка*.

## Методические рекомендации к изучению материала

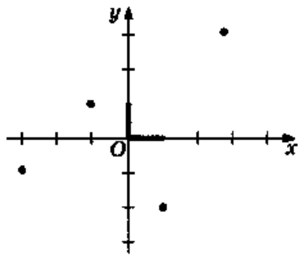



*Рис. 109*

1°. По рисунку 109 напомнить учащимся понятия *осей координат, начала координат, положительных и отрицательных полуосей*. Выбрать единицу измерения. Затем выполнить на доске упражнение 2 (при этом лучше выбрать четыре точки в разных четвертях). В процессе выполнения упражнения вспомнить определения *абсциссы и ординаты точки* и обсудить вопрос о координатах точек, лежащих на осях, и о координатах точки $O$—начала координат. Затем следует выполнить упражнение 1, которое представляет собой обратную задачу: построение точки по заданным координатам. После выполнения упражнения 1 рассмотреть вопрос, какие знаки имеют точки, лежащие в одной четверти — и на основе решения задач 1 и 2 сделать вывод: *В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются*.

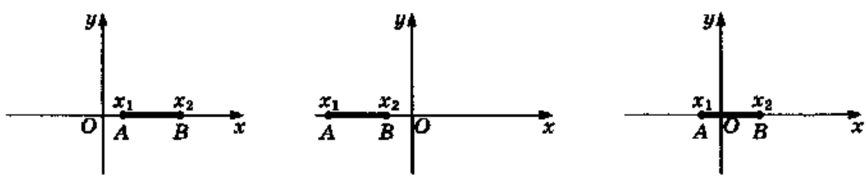
В учебнике приведено решение задачи 9, направленное на закрепление знаний учащихся о знаках координат точек, лежащих в полуплоскостях, на которые оси координат разбивают координатную плоскость. Поэтому промежуточные результаты проводимых рассуждений, а именно, что точки $A$ и $B$ лежат в разных полуплоскостях относительно оси $y$ и в одной полуплоскости относительно $x$, более важны, чем результат решения: отрезок $AB$ пересекает ось $y$ и не пересекает ось $x$

Решения задач 4 и 7, которые являются обратными друг другу, позволяют сделать вывод: если прямая перпендикулярна оси $x$ и пересекает ее в точке $(a, 0)$, то все точки этой прямой имеют *абсциссу*, равную $a$. Аналогичное утверждение можно сделать и относительно оси $y$.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать названия осей координат. Устно выполнить задания 139–141, сделать вывод из анализа решения этих задач, сформулированный в тетради. При решении этих задач учащиеся фактически отвечают на контрольные вопросы 1–3 к § 8. Задачи 139 и 140 аналогичны задачам 1 и 2. После решения задач 4 и 7 из учебника, также можно сделать вывод, приведенный в тетради.*

**2°.** Для вывода формул координат середины отрезка и расстояния между точками (пункт 73) потребуется формула расстояния между двумя точками координатной оси. Обозначим расстояние между точками $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ через $d$, тогда:

$d = |x_2 - x_1| = \begin{cases} x_1 - x_2, \text{ если } x_2 \geq x_1 \\ x_1 - x_2, \text{ если } x_1 > x_2 \end{cases}$ т.е. расстояние $d$ равно разности между большей координатой (координатой правой точки) и меньшей координатой (координатой левой точки). Пусть для определенности $x_2 > x_1$. Доказательство проводится отдельно для трех возможных вариантов расположения точек $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ относительно начала координат (рис. 110).




| | | |
|---|---|---|
| $OA = x_1, OB = x_2$ | $OA = -x_1, OB = -x_2$ | $OA = -x_1, OB = x_2$ |
| $AB = OB - OA$ | $AB = OB - OA$ | $AB = OB + OA$ |
| $AB = x_2 - x_1$ | $AB = x_2 - x_1$ | $AB = x_2 + (-x_1) = x_2 - x_1$ |

*Рис. 110*

Для случая, когда $x_1 > x_2$ доказательство аналогичное.

Этот результат можно сформулировать и для расстояния между точками оси $y$.

Вывод формул *координат середины отрезка*, приведенный в учебнике, прост и не требует особых комментариев. Однако, отметим, что в процессе доказательства следует обратить внимание на то, что если $|x - x_1| = |x - x_2|$, то $|x - x_1|$ и $|x - x_2|$ — это два числа с одинаковыми модулями, а значит, они либо равны, либо противоположны. Отсюда либо $x - x_1 = x - x_2$, либо $x - x_1 = -(x - x_2)$.

После вывода формул *координат середины отрезка*, на формирование умения применять эти формулы можно предложить учащимся выполнить упражнения.

1. Найдите координаты середины отрезка $AB$, если: а) $A(-6, 2)$, $B(4, 4)$;
б) $A(-5, -4)$, $B(-1, 3)$.
2. Определите координаты центра окружности, диаметром которой является отрезок $AB$, если $A(4, -2)$ и $B(1, 3)$.
3. В треугольнике $OAB$ проведена медиана $OC$. Определите координаты точки $C$, если $A(-5, 0)$, $B(0, -3)$.
4. Дан треугольник $ABC$ с вершинами $A(7, -4)$, $B(-4, 3)$ и $C(5, 0)$. Определите координаты концов средней линии треугольника, параллельной стороне $AB$.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулы для вычисления координат середины отрезка. Затем на закрепление выполнить задания 145–148, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1–4.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 71 и 72, решить задачи 1, 2, 4, 7, 9 и 15 из учебника; дома — вопросы 1–4, задачи 8, 11, 13 (2) и 14.

## Указания к задачам

На примере решения задачи 7 полезно напомнить учащимся, что найти геометрическое место точек — это значит доказать два взаимно обратных утверждения: а) любая точка искомой фигуры обладает указанным свойством и б) любая точка, обладающая этим свойством, является точкой искомой фигуры.

1) Пусть точка $A$ лежит на прямой $a$. Так как эта прямая параллельна оси $y$ и пересекает ось $x$ в точке $(3, 0)$, то абсцисса точки $A$ равна 3.

2) Пусть точка $B$ имеет абсциссу 3. По определению абсциссы точки это значит, что если провести через точку $B$ прямую, параллельную оси $y$, то она пересечет ось $x$ в точке $(3, 0)$. Так как прямая $a$ проходит через точку $(3, 0)$ и параллельна оси $y$, а через

одну точку проходит только одна прямая, параллельная данной (в нашем случае оси $y$), то точка $B$ лежит на прямой $a$.

Таким образом, мы доказали оба утверждения. Значит, прямая $a$ является искомым геометрическим местом точек.

Решение задачи 8 аналогично решению задачи 7. Искомым геометрическим местом точек является пара прямых, параллельных оси $y$, одна из которых пересекает ось $x$ в точке $(3, 0)$, а другая — в точке $(-3, 0)$.

**Задача 10.** Точки $A$ и $B$ имеют положительные ординаты, а так как отрезок $AB$ не пересекает ось $x$, то все точки отрезка лежат выше оси $x$. Значит, отрезок $AB$ пересекает положительную полуось $y$.

При решение задачи 14 сначала надо построить точки $A$, $B$, $C$ и $D$ в координатной плоскости и доказать, что отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е. что середины этих отрезков совпадают.

## Расстояние между точками

### Комментарий для учителя

В пункте 73 выводится *формула длины отрезка*. Вывод формулы прост и не требует особых комментариев. Это позволяет организовать урок в форме беседы.

**Текущие результаты изучения пункта 73. Учащиеся должны:**

– *выводить* формулу *длины отрезка*;

– *решать* задачи с использованием формул *координат середины отрезка* и *длины отрезка*.

### Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Как было замечено в пункте **72** для вывода формулы *расстояния между точками* (пункт **73**) потребуется формула расстояния между двумя точками, расположенными на прямых, параллельных либо оси $x$, либо оси $y$. С этой целью полезно решить задачи:

> **1.** Докажите, что расстояние между точками $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ оси $x$ при любых $x_1$ и $x_2$ определяется по формуле $d = |x_2 - x_1|$.

2. Докажите, что расстояние между точками $(x_1, a)$ и $(x_2, a)$ при любых $x_1$ и $x_2$ определяется по формуле $d = |x_2 - x_1|$.
3. Докажите, что расстояние между точками $(b; y_1)$ и $(b; y_2,)$ при любых $y_1$ и $y_2$ определяется по формуле $d = |y_2 - y_1|$.

Результатом решения этих задач являются следующие формулы:
$d = |x_2 - x_1|$ для точек $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ оси $x$;
$d = |y_2 - y_1|$ для точек $(0, y_1)$ и $(0, y_2)$ оси $y$.

Приходим к выводу, что «*расстояние между точками на прямых, параллельных осям координат, вычисляются по выше приведенным формулам*».

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить задания 149–151, которые являются выше приведенными задачами 1–3.*

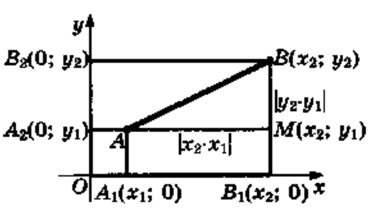



*Рис. 111*

2°. При выводе *формулы расстояния между точками* полезно использовать рисунок 111.

Для того чтобы пояснить учащимся, как возводить в квадрат модули $|x_2 - x_1|$ и $|y_2 - y_1|$ можно привести следующее рассуждение: если $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1$ и $|x_2 - x_1|$ — это одно и то же число, а если $x_2 < x_1$, то $x_2 - x_1$ и $|x_2 - x_1|$ — это противоположные числа. Поэтому и в том и в другом случае получаем: $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ и $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$. При решении задач на вычисление удобнее пользоваться формулой, записанной в виде $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

После вывода формулы *расстояния между точками*, на формирование умения <u>применять</u> эту <u>формулу</u> можно предложить учащимся выполнить упражнения.

1. Найдите расстояние между точками $A$ и $B$, если $A(4, -3)$, $B(-2, 5)$.
2. Докажите, что треугольник $CDE$ с вершинами в точках $C(3, 4)$, $D(6, 8)$, $E$ $(10, 5)$ — равнобедренный.

Затем разобрать решение задачи 15, приведенное в учебнике. При этом полезно обратить внимание учащихся на то, что из условия задачи: искомая точка лежит на оси $x$, следует, что она имеет координаты $(x, 0)$. После получения ответа можно вспомнить определение окружности и определить, что точки $A$ и $B$ — это точки одной окружности с центром в точке $C$ и радиусом $R = AC = BC$.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу для вычисления длины отрезка. Затем на закрепление выполнить задания 152–153, которые полностью совпадают с выше приведенными задачами 1 и 2.*

**3°.** В самостоятельную работу включена одна задача. Однако содержание задачи проверяет умение строить точки по заданным координатам, находить координаты середины отрезка и длину отрезка.

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 73, провести самостоятельную работу, разобрать ее решение; дома — вопрос 5, задачи 17, 18 и 20.

## Самостоятельная работа по теме: «Теорема Пифагора»

*1-й вариант*

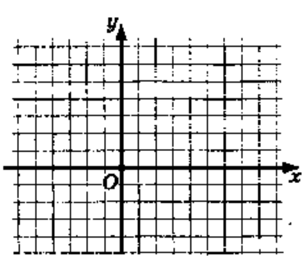



*Рис. 112, а*

На рисунке отметьте точки $A$ (0, 0), $B$ (–1, 1), $C$ (0, 2) и $D$ (1, 1). Определите вид полученного четырехугольника $ABCD$.

*Ответ:* Четырехугольник ABCD является:

а) параллелограммом;

б) ромбом;

в) квадратом;

г) прямоугольником.

*2-й вариант*

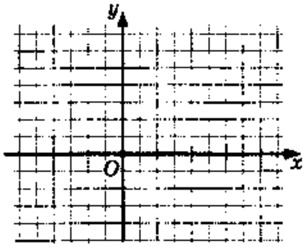



*Рис. 112, б*

На рисунке отметьте точки $A$ (2, 0), $B$ (3, 2), $C$ (0, 4) и $D$ (−1, 2). Определите вид полученного четырехугольника $ABCD$.

*Ответ:* Четырехугольник ABCD является:

а) параллелограммом;

б) ромбом;

в) квадратом;

г) прямоугольником.

## Указания к задачам

**18.** 1) Вначале следует определить расстояние между точками и, опираясь на эти расчеты, провести дальнейшие исследования. Если бы точки $A$, $B$ и $C$ не лежали на одной прямой, т.е. были бы вершинами треугольника, то каждый из отрезков $AB$, $BC$ и $AC$ был бы строго меньше суммы двух других. Однако $AC = AB + BC$. Отсюда следует, что точки лежат на одной прямой.

2) Из равенства $AC = AB + BC$ следует, что именно точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, так как если бы между двумя другими лежала точка $A$ или точка $C$, то выполнялось бы другое равенство: либо $BC + AC = AB$, либо $AC+AB = BC$, что противоречит условию.

**20.** Пусть искомая точка $A$ имеет координаты $(x, y)$. Квадрат расстояния от нее до оси $y$ равен $x^2$, квадрат расстояния до оси $x$ равен $y^2$, а квадрат расстояния до точки $M$ (3, 6) равен $(x-3)^2 + (y-6)^2$. По условию задачи $x^2 = y^2$ и $x^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2$. Равенство $x^2 = y^2$ возможно в двух случаях: если $x = y$ или если $x = -y$.

1-й случай. Если $x = y$, то $x^2 = (x-3)^2 + (x-6)^2$. Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = 15$, значит, точка $A$ имеет координаты (3, 3) или (15, 15).

2-й случай. Если $x = -y$, то $x^2 = (x-3)^2 + (-x-6)^2$. Полученное уравнение не имеет решений. Значит других точек, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

При решении <u>задач **21** и **22**</u> полезно на основе определения квадрата наметить план решения.

а) Квадрат по определению — прямоугольник с равными сторонами.

б) Прямоугольник — параллелограмм, у которого диагонали равны.

Отсюда следует, что надо установить:

1) у данного четырехугольника — диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит четырехугольник — параллелограмм;

2) у параллелограмма диагонали равны, значит параллелограмм — прямоугольник;

3) у прямоугольника стороны равны, значит прямоугольник — квадрат.

## Уравнение окружности

### Комментарий для учителя

В пункте 74 выводится уравнение. Из пункта 38 § 5 окружность определяется, как фигура, которая состоит из точек, равноудаленных от данной точки. Именно это определение положено в основу вывода уравнения окружности.

**Текущие результаты** изучения пункта 74. Учащиеся должны:

– *выводить* уравнение окружности;

– *решать* задачи на: вывод уравнений окружностей; *исследование* частных случаев расположения окружности.

### Методические рекомендации к изучению материала

1°. Перед выводом уравнения окружности полезно напомнить учащимся, что найти геометрическое место точек — это значит доказать два взаимно обратных утверждения: первое — любая точка фигуры обладает указанным свойством и второе — любая точка, обладающая этим свойством, является точкой фигуры.

Из курса алгебры учащимся известны уравнения с двумя переменными $x$ и $y$. При этом все точки, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют данному уравнению, составляют на плоскости некоторую фигуру. А любая точка полученной фигуры имеет координаты $(x; y)$, удовлетворяющие данному уравнению. После введения понятия уравнения фигуры, полезно проиллюстрировать это понятие при решении задачи:

> Найдите геометрическое место точек плоскости $xy$, для которых $x = y$.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся сформулировать понятие уравнения фигуры и выполнить задания 154, которые полностью совпадают с выше приведенной задачей.*

**2°.** Вначале надо вспомнить с учащимися, что окружность — это геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки. *Уравнение окружности* описывает фигуру, состоящую из всех точек плоскости, удаленных от точки $A_0$ на расстояние $R$.

Для того чтобы доказать, что полученное уравнение является *уравнением* данной *окружности*, нужно убедиться, что любая точка, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, принадлежит окружности.

**3°.** Затем следует рассмотреть решение задачи 30. Решение полезно провести самому учителю и выполнить выкладки на доски с комментариями. Рекомендуется решить задачу 31, поясняя, что найти координаты точки пересечения любых двух линий, заданных двумя уравнениями, значит, решить систему уравнений. Её решение и даст координаты точки пересечения.

*В рабочей тетради следует предложить учащимся записать уравнение окружности и, если учитель сочтет полезным, решить задачи 155–161 или часть из них. Задача 161 повышенного уровня сложности.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пункта 74 и решение задачи 30, решить задачу 31; <u>дома</u> — вопросы 6 и 7, задачи 25, 27, 32 и 33.

## Указания к задачам

Решение <u>задачи 25</u> лучше начать с вычисления координат центра окружности — точки $C$, являющейся серединой отрезка $AB$, затем вычислить квадрат расстояния $AC$ (или $BC$), т.е. квадрат радиуса окружности.

При решении <u>задачи 27</u> полезно обратить внимание учащихся на то, что из условия задачи: центр искомой окружности лежит на оси $x$, следует, что он имеет координаты $(a, 0)$.

При решении <u>задачи 28</u> следует заметить, что для того чтобы окружность касалась оси $x$, нужно, чтобы расстояние от точки (1, 2) до оси $x$ было равно радиусу окружности.

Решение <u>задачи 30</u> приведено в учебнике.

Координаты точек пересечения двух окружностей в <u>задаче 31</u> должны удовлетворять уравнениям каждой из окружностей, значит, они являются решением системы уравнений. Подставив во второе уравнение единицу вместо суммы квадратов, получим систему уравнений, равносильную данной: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$.

При решении <u>задачи 32</u> полезно обратить внимание учащихся на то, что из условия задачи: искомые точки лежат на окружности и на оси $x$, следует, что они имеет ординаты, равные 0.

**33, 34.** Если окружность имеет с осью $y$ общую точку, то ее координаты (0, у) должны удовлетворять уравнению окружности. Подставив $x = 0$ в уравнение окружности, получим в <u>задаче 33</u>: $y^2 + 1 = 0$, в <u>задаче 34</u>: $y^2 = 0$. Так как уравнение $y^2 + 1 = 0$ не имеет решений, а уравнение $y^2 = 0$ имеет одно решение у = 0, то в первом случае окружность не имеет с осью $y$ общих точек, а во втором случае касается оси $y$ в точке (0; 0).

## Уравнение прямой. Координаты точки пересечения прямых. Расположение прямой относительно системы координат. Угловой коэффициент в уравнении прямой. График линейной функции. Пересечение прямой с окружностью

### Комментарий для учителя

Материал этих пунктов в значительной степени знаком учащимся из курса алгебры. Кроме того, как было сказано в комментариях к параграфу «Планируемые результаты обучения основного общего образования» формулируют требование к результатам изучения этого материала следующим образом: «*Вы-*

*пускник получит возможность овладеть координатным методом решения задач на вычисления и доказательства»*. Поэтому можно предложить весь материал пунктов 75–79 дать в форме обзорной лекции, а основное время посвятить решению задач.

**Текущие результаты** изучения пунктов 75–79. Учащиеся должны:

– *выводить* уравнение прямой;

– *исследовать* расположения прямой относительно осей координат и геометрический смысл коэффициента $k$ в уравнении прямой $y = kx + l$;

– *исследовать* взаимное расположение прямой и окружности;

– *решать* задачи на: вывод уравнений прямой; *исследование* частных случаев расположения прямых; *нахождение* точек пересечения прямых и пересечения прямой окружности.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°**. В пункте **75** выводится общее *уравнение прямой*. Прежде чем приступать к выводу *уравнения прямой*, полезно вспомнить определение серединного перпендикуляра и решить задачу:

> Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек (0, 1) и (1, 2).

Координаты любой точки $M(x, y)$, равноудаленной от точек (0, 1) и (1, 2), удовлетворяют уравнению: $x^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$. Верно и обратное: если координаты точки удовлетворяют полученному уравнению, то она равноудалена от точек (0, 1) и (1, 2).

После приведения подобных членов полученное уравнение примет вид: $x + y - 2 = 0$. Это уравнение является уравнением геометрического места точек, равноудаленных от точек (0, 1) и (1, 2). Итак, геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек, является прямая, перпендикулярная к отрезку с концами в точках с координатами (0, 1) и (1, 2) и проходящая через его середину (теорема 5.3).

> ***В рабочей тетради решить задачу 161, которая совпадает с выше приведенной задачей, затем следует предложить учащимся записать уравнение прямой и решить задачу 162.***

**2°.** В пункте 76 исследуется вопрос:

> Как найти координаты точки пересечения двух прямых?

После исследования этого вопроса рассмотреть решение задачи 43 и сделать вывод об условии, определяющем параллельность двух прямых.

В пункте 77 исследуется вопрос о расположении прямой относительно системы координат.

> 1. Как расположена прямая, если в ее уравнении один из коэффициентов: $a = 0$
> ($b = 0$, $c = 0$)?

В результате проведенного исследования можно сделать вывод: «*если $a = 0$, $b \neq 0$, то все точки прямой имеют одну и ту же ординату и прямая параллельна оси $x$; если $a \neq 0$, $b = 0$, то все точки прямой имеют одну и ту же абсциссу и прямая параллельна оси $y$; если $c = 0$, то прямая проходит через начало координат*».

> Какой коэффициент в уравнении прямой называется угловым и почему?

В пункте 78 общее *уравнение прямой* приводится к более привычному для учащихся виду: $y = kx + l$. Затем исследуется вопрос о геометрическом смысле. В результате проведенного исследования можно сделать вывод: «*коэффициент $k$ с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью $x$*».

**3°.** В пункте 80 исследуется вопрос о взаимном расположении прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом $R$ окружности и расстоянием $d$ от центра окружности до прямой. Полезно напомнить, что вопрос о взаимном расположении прямой и окружности уже рассматривался в 7 классе (§ 5).

> При каком условии окружность радиуса $R$ и прямая, от которой расстояние до центра окружности равно $d$, не пересекаются, пересекаются в двух точках, касаются?

При исследовании используется координатный метод: вводится система координат так, чтобы уравнения рассматриваемых фигур имели бы наиболее простой вид; записываются уравнения прямой и окружности, и вопрос о взаимном расположении прямой и окружности сводится к вопросу о существовании и количестве решений системы этих двух уравнений. После проведенного исследования можно сделать вывод: *«если $R < d$, то окружность и прямая не пересекаются; если $R = d$, то окружность и прямая касаются; если $R > d$, то окружность и прямая пересекаются в двух точках»*.

При исследовании взаимного расположения прямой и окружности полезно для наглядности воспользоваться плакатом такого типа, как на рисунке 113.

## Взаимное расположение прямой и окружности

(где $d$ – расстояние от центра окружности, $r$ – радиус окружности).

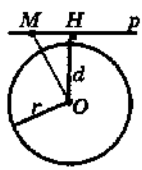
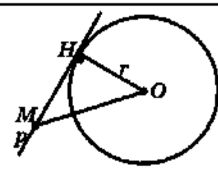
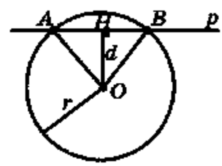
| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек. | Если $d = r$, то прямая и окружность имеют одну общую точку (прямая $p$ – касательная к окружности). | Если $d < r$, то прямая и окружность имеют две общие точки (прямая $p$ –секущая). |

*Рис. 113*

*В рабочей тетради, если учитель сочтет полезным, можно предложить учащимся решить задачи 162–165 или часть из них. Задача 165 повышенного уровня сложности. Там же приведена таблица «Взаимное расположение прямой и окружности». Задачу 165 полезно решить после рассмотрения вопроса о пересечении окружности и прямой.*

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 75–79, по учебнику разобрать решения задач 35, 43, 45; дома — вопросы 8–12, повторить задачи 8 и 13 (2) из § 5, п. 40, задачи 36 (1), 40 (2), 46 и 49 (2).

На втором уроке в классе — рассмотреть теоретический материал пункта 80 и по учебнику разобрать решение задачи 50 (1), решить задачи: 38, 39 (2), 49 (1), 51; дома — вопрос 13, задачи 44, 46 и 50 (2, 3).

На третьем уроке в классе — решить задачи 36(3), 39 (3), 40 (3), 41 и 42; дома — вопросы 5 и 12 из § 7, задачи 47, 48 и 49 (3).

## Указания к задачам

При решении задач 35–37 полезно заметить, что для того чтобы построить прямую в координатной плоскости, достаточно знать координаты любых двух ее точек. Решение задачи 35 приведено в учебнике.

**38.** Так как точки (1, 2) и (2, 1) лежат на прямой $ax + by = 1$, то их координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е. справедливы одновременно два равенства: $a + 2b = 1$ и $2a + b = 1$.

**39.** Если некоторая точка принадлежит прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой. Поэтому, подставив известную координату этой точки в уравнение прямой, можно найти другую ее координату. В задаче 39, можно найти координаты точек пересечения прямой с осями координат, полагая равной нулю сначала одну из координат, затем другую.

Координаты точек пересечения двух прямых в задаче 40 должны удовлетворять уравнениям каждой из прямых, значит они являются решениями системы уравнений.

Задачу 41 можно решить по следующему плану: 1. решить систему из двух уравнений; 2. подставить полученное решение в третье уравнение.

Задачу 42 можно решить по следующему плану: 1. найти середины сторон треугольника, заданного своими вершинами; 2. составить уравнения прямых, содержащих медианы треугольника; 3. решить систему из двух полученных уравнений; 4. подставить полученное решение в третье уравнение.

Решение задачи 43 приведено в учебнике. Его следует использовать при решении задачи 44.

Решение задачи 45 приведено в учебнике.

Решение задачи 46 аналогично приведенному в учебнике решению задачи 45. Все точки прямой, параллельной оси $y$, имеют одну и ту же абсциссу, а так как прямая проходит через точку с абсциссой 2, то уравнением прямой является уравнение $x - 2 = 0$.

**47.** Уравнение $ax + by = 0$ является уравнением прямой, проходящая через начало координат. Подставим координаты точки (2, 3).

Решение задачи 50 приведено в учебнике.

При решении задачи 51 необходимо выразить $y$ из уравнения прямой через $c$, подставить его в уравнение окружности. Получено квадратное уравнение относительно $x$ с параметром $c$: $2x^2 + 2cx + (c^2 - 1) = 0$. Полученное уравнение имеет:

– одно решение, если $D = (2c)^2 - 4 \cdot 2(c^2 - 1) = 0$, прямая и окружность касаются;

– два решения, если $D = (2c)^2 - 4 \cdot 2(c^2 - 1) > 0$, прямая и окружность пересекаются;

– нет решения, если $D = (2c)^2 - 4 \cdot 2(c^2 - 1) < 0$, прямая и окружность не пересекаются.

## Дополнительные задачи

**1.** Запишите уравнения оси абсцисс и оси ординат.

**2.** Запишите уравнения прямой, если она пересекает оси координат в точках (0, 4) и (8, 0).

**3.** Запишите уравнения прямой, которая образует с осью $x$ угол, равный 60°, и проходит через точку (0, −3).

**4.** Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнениями: а) $x + y - 7 = 0$; б) $x - y + 7 = 0$; в) $x + y - c = 0$.

**5.** Чему равно расстояние от начала координат до прямой: а) $x + y - 6 = 0$; б) $x + y + 8 = 0$.

**6.** Расстояние от начала координат до прямой $m$ равно 3. Пересекается ли прямая $m$ с окружностью $x^2 + y^2 = 16$?

**7.** Докажите, что окружность $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$, а) касается оси $y$; б) пересекается с осью $x$; в) не пересекается с прямой $y = -9$.

# Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°

## Комментарий для учителя

Материал этого пункта продолжает тригонометрическую линию, начатую в параграфе 7. Здесь определяются *синус, косинус, тангенс и котангенс для любого угла от* 0° *до* 180°. При определении тригонометрических функций используется координатный метод. Умение определять тригонометрические функции тупого угла по значению соответствующего острого угла будет особенно актуально при изучении темы «Решение треугольников».

**Текущие результаты** изучения пункта 80. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на координатной плоскости соотношения, определяющие тригонометрические функции для любого угла от 0° до 180°;

– *формулировать, объяснять и выводить* формулы, позволяющие значение тупого угла находить по значению соответствующего острого угла;

– *решать* задачи на непосредственное применение определений *синуса, косинуса, тангенса* и *котангенса для любого угла от* 0° *до* 180°, *формулы приведения;*

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°**. Перед изучением нового материала следует повторить с учащимися определения косинуса, синуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Используя рисунок **180** из учебника, для острого угла $\alpha$, отложенного в верхнюю полуплоскость выразим значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha$, и $\operatorname{ctg}\alpha$, через координаты точки $A(x, y)$ и радиус $R$: $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$, $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$, из прямоугольного треугольника с острым углом $\alpha$ , гипотенузой, равной $R$, и катетами, прилежащий к $\alpha$ равен $x$, а противолежащий катет равен $y$. Поскольку $\alpha$ — острый угол, то точка $A$ лежит в первой четверти, имеет положительные абсциссу и ординату, значит, длины катетов равны значениям координат. По этим формулам впредь будут определяться косинус, синус, тангенс и котангенс любого угла.

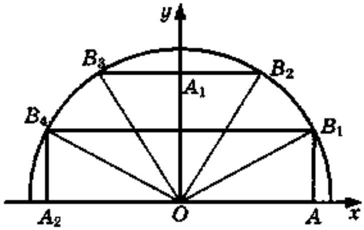



*Рис. 114*

Чтобы проиллюстрировать и в некоторой степени разъяснить использование координатного метода для определения sinα, cosα, tgα и ctgα через координаты, на единичной полуокружности (рис. 114), определим координаты точек пересечения лучей, выходящих из начала координат и образующих с положительной полуосью $x$ углы 30°, 60°, 120° и 150°. Для этого рассматриваем соответствующие прямоугольные треугольники: $OAB_1$, $OA_1B_2$, $OA_1B$з, $OA_2B_4$. Они равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда находим значения сторон треугольников и координаты точек пересечения:

$$B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), B_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Используя введенные формулы, находим значения cos, sin, tg и ctg для углов 30°, 60°, 120°, 150°. Аналогично находятся значения cos, sin, tg и ctg для углов 45° и 135°.

После этого, используя введенные формулы, нужно найти значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 90°, 180° и 0°.

Рассуждения, проводимые по ходу вывода формул $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ и для $\alpha \neq 90°$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, можно выполнить по следующему плану.

1) В координатной плоскости построить окружность с центром в начале координат и радиусом $R$, отметить на ней точку $A(x, y)$ и угол α, образованный радиусом $OA$ с положительной полуосью $x$.

Для угла α записать формулы: $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$, $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$.

2) Построить радиус $OA_1$, образующий с положительной полуосью $x$ угол $180° - \alpha$, отметить точку $A_1(x_1, y_1)$ и для угла $180° - \alpha$ записать формулы $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{x_1}{R}$, $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{y_1}{R}$.

3) Провести к оси $x$ перпендикуляры $AB$ и $A_1B_1$. Так как угол, смежный с углом $180° - \alpha$, равен $a$, то прямоугольные треугольники $AOB$ и $A_1OB_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства соответствующих катетов $AB = A_1B_1$ и $OB$ и $OB_1$ следуют равенства $y = y_1$ и $x = -x_1$. Отсюда $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, для $\alpha \neq 90°$ $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, и для $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

***В рабочей тетради, если учитель сочтет полезным, записать формулы приведения. В задаче 166 записать в таблицу значения тригонометрических функций углов. Затем решить задачу 167.***

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта, решить задачи 52, 56 (1 и 4), 57 (3), 61 и 62; дома — вопрос 8–12, повторить задачи 8 и 13 (2) из §5, п.40, задачи 36 (1), 40 (2), 46 и 49 (2).

На втором уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме «Декартовы координаты на плоскости» (25 минут) и разобрать решения ее задач на уроке; дома — повторить вопросы 22, 23 и 24 из § 1.

## Указания к задачам

Решение задач 53 и 54 возможно с использованием калькулятора. Однако при ипользовании калькулятора следует найти не только $\sin 160°$, $\cos 140°$, $\operatorname{tg} 130°$, и $\operatorname{ctg} 110°$, но и $\sin 20°$, $\cos 40°$, $\operatorname{tg} 50°$, и $\operatorname{ctg}\alpha$ а затем их сравнить.

**55.** Примечание. 1. Так как синус любого угла от **0°** до **180°** положителен, то $\alpha$ может быть как острым, так и тупым углом. 2. Так как $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ отрицательные числа, то $\alpha$ может быть только тупым углом.

Задачи 56 (1, 3) и 57 (1) могут быть решены по образцу решения задачи **63 § 7** (с. 91 учебника).

При решении задач **56 (2, 4), 57 (3)** применяются полученные формулы и значения углов 30°, 45° и 60°.

При решении задач **57** (2), **58, 59** целесообразно построить угол, пользуясь определениями синуса угла, косинуса угла и тангенса угла, введенными в данном пункте.

**61.** 1) Если $\cos\alpha = \cos\beta > 0$, то $\alpha$ и $\beta$ — острые углы. Предположим, что $\alpha \neq \beta$, тогда либо $\alpha > \beta$ и тогда $\cos\alpha < \cos\beta$, либо $\alpha < \beta$ и тогда $\cos\alpha > \cos\beta$, так как с возрастанием угла косинус угла убывает. Но по условию $\cos\alpha = \cos\beta$, значит, предположение о том, что $\alpha \neq \beta$, неверно. Таким образом, $\alpha = \beta$.

2) Если $\cos\alpha = \cos\beta < 0$, то $\alpha$ и $\beta$ — тупые углы. Тогда $\alpha_1 = 180° - \alpha$ и $\beta_1 = 180° - \beta$ — острые углы, причем $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha$ и $\cos\beta_1 = -\cos\beta$, значит, $\cos\alpha_1 = \cos\beta_1$, т.е. по доказанному в первой части $\alpha_1 = \beta_1$, следовательно $\alpha = \beta$.

## Контрольная работа по теме: «Декартовы координаты на плоскости»

*1-й вариант*

**1.** В треугольнике $ABC$ с вершинами в точках $A(7, 3)$, $B(5, 1)$, $C(1,14)$ проведена медиана $CD$. Найдите координаты ее основания.

*Ответ:* 1. (1; 1); 2. (1; 2); 3. (6; 1); 4. (6; 2).

**2.** Упростите выражение: $b \cdot \sin 45° + b \cdot \cos 135° + b \cdot \sin 180°$.

*Ответ:* 1. 0; 2. $b$; 3. $b\sqrt{2}$; 4. $b(\sqrt{2}+1)$.

**3.** Запишите уравнение прямой, которая образует с осью $x$ угол, равный 30°, и проходит через точку (4, 0).

**4.** Заданы точки $A$ (1; 2) и $B$ (3; 0). Найдите геометрическое место точек $M$ таких, что $AM^2 - BM^2 = AB^2$.

*2-й вариант*

**1.** Упростите выражение: $b \cdot \sin 120° + b \cdot \cos 150° + b \cdot \sin 90°$.

*Ответ:* 1. 0; 2. $b$; 3. $b\sqrt{3}$; 4. $b(\sqrt{3}+1)$.

**2.** Отрезок $AB$ — диаметр окружности. Определите координаты центра окружности, если $A(1, 5)$, $B(7, -3)$.

*Ответ:* 1. (4; 1); 2. (4; 4); 3. (−3; −4); 4. (4; −1).

**3.** Заданы точки $A$ (1; 2) и $B$ (3; 0). Найдите геометрическое место точек $M$ таких, что $AM = 2BM$.

**4.** Запишите уравнения прямой, которая образует с осью $x$ угол, равный 43°, и проходит через точку (0, 5).

# § 9. ДВИЖЕНИЕ

Номенклатура содержания, определяемая Примерными программами основного общего образования, как геометрические преобразования, содержит примеры движений фигур: симметрии фигур (осевая и центральная), параллельный перенос, поворот, а так же понятия о гомотетии и подобии фигур. Введение в Примерные программы этой темы обосновано, не только и не столько, необходимостью ознакомить учащихся с реально существующими и часто встречающимися в обыденной жизни отношениями между реальными объектами, сколько потребностями самого предмета геометрии. Понятие движения важно, прежде всего, тем, что, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. Это, в свою очередь необходимо для обоснования правил построения фигур с заданными свойствами, а точнее, для этапа «исследование» в задачах на построение.

В школьном курсе геометрии геометрические преобразования рассматриваются как точечные преобразования, т.е. такие преобразования, когда каждой точке плоскости в планиметрии (пространства в стереометрии) ставится в соответствие другая точка плоскости (пространства). Иначе говоря, точечное преобразование является *отображением плоскости* (пространства) *на себя* как множества (совокупности) точек. При этом в курсе геометрии рассматриваются две группы преобразований: движение и подобие. Преобразование движения определяется, как геометрическое преобразование, сохраняющее расстояния между точками.

В данном параграфе рассматриваются преобразования плоскости, определяемые как движения. Преобразование подобия будут рассмотрены в § 11 в курсе девятого класса. «Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся требование к уровню изучения данной темы формулируют следующим образом: «*Выпускник получит возможность приобрести опыт применения идей движения при решении задач на вычисления и доказательства*». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако, как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объеме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала — решать учителю. При этом урок лучше организовать в форме лекции. Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами преобразования движения — симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос — учащиеся должны усвоить на уровне практических применений.

Особенностью этого учебника является введение понятия преобразования фигур, частным случаем которого является понятие движения фигур. Таким образом, автор учебника не акцентирует внимание на то, что преобразование фигур порождается некоторым преобразованием плоскости. Такой подход к изложению темы позволяет не перегружать учебный материал сложными понятиями и способствует лучшему восприятию его учащимися. Понятие движения важно, как было сказано выше, тем, что, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. В этом учебнике признаки равенства треугольников доказываются с опорой на аксиому о существовании треугольника, равного данному, тем самым постулируется существование равных треугольников. В теме «Движение» дается определение равных фигур и доказывается теорема об эквивалентности двух определений равенства треугольников: с одной стороны через равенство элементов треугольников, а с другой общим определением равенства фигур. Таким образом, этим обосновывается существование равных фигур.

**Планируемые итоговые результаты изучения восьмого параграфа:**

Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать* и *объяснять* понятия: *преобразования*, *движения* и его свойства;

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки*: центральной симметрии, симметрии относительно прямой, параллельного переноса, поворота;

– *изображать*, *обозначать* и *распознавать* на рисунке точки и простейшие фигуры;

– *симметричные* данным *относительно точки*;

– *симметричные* данным *относительно* прямой;

– в которые переходят данные фигуры при *параллельном переносе*;

– в которые переходят данные фигуры при *повороте*;

– *применять* при решении простейших задач на доказательство, построения и вычисления *идеи движения*.

# Преобразования фигур. Свойства движения

## Комментарий для учителя

Вводимые в данных пунктах определение преобразования фигур, определение движения, а также свойства движения в дальнейшем не применяются в качестве аппарата для решения задач и изложения теории, поэтому можно рекомендовать изучение материала в ознакомительном порядке, то есть не требовать от учащихся воспроизведения доказательств. Формой проведения урока можно рекомендовать — лекцию.

**Текущие результаты** изучения пунктов 82 и 83. Учащиеся должны:

– *объяснять* понятия: преобразование и движение;

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* свойства движения: в *какие фигуры переводятся прямые, полупрямые и отрезки при движении,* и свойство: *при движении сохраняются углы между полупрямыми;*

– *объяснять* свойства движения: *два движения, выполненные последовательно, являются движением; преобразование, обратное движению также являются движением.*

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** При введении определения *преобразования*, следует заметить, что, если указан способ, с помощью которого каждой точке $A$ данной фигуры ставится в соответствие точка $A'$, то мы будем говорить, что задано *преобразование*. Это означает, что в результате *преобразования* точка $A$ переходит в точку $A'$. При этом различным точкам $A$ и $B$ соответствуют различные точки $A'$ и $B'$ (рис. 183 учебника).

**2°.** При введении определения *движения* полезно сделать рисунок 115. В замечании, сделанном в учебнике, говорится, что понятие движения в геометрии связано с обычным представлением о перемещении. Поэтому можно представить, что мы передвигаем фигуру $F$ по плоскости. При этом любая точка плоскости так же передвигается, как и вся фигура. Если мы знаем расстояния от некоторой точки плоскости до вершин треугольника, то всегда можно определить точку, в которую она перейдет, поскольку при движении сохраняются расстояния между точками. Поэтому и неважно, как двигался треугольник, а важно, откуда он начал свое движение ($F$) и его конечное положение ($F`$).

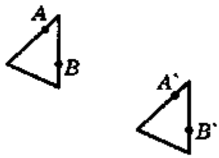


*Рис. 115*

При введении определения движения плоскости следует обратить внимание на его важнейшее свойство: *сохранять расстояние между точками.* Для того, чтобы проверить правильность усвоения определения *движения* можно предложить упражнение:

> Точки $A$ и $B$ при движении переходят в точки $A`$ и $B`$. Чему равно расстояние между точками $A`$ и $B`$, если $AB = 6$ см?

3°. Изложение свойства движения: «*Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение*» — целесообразно начинается с разъяснения формулировки теоремы. Сначала следует объяснить учащимся, что означает последовательное выполнение двух *движений*. Первое *движение* переводит точку $A$ фигуры $F$ в точку $A`$ фигуры $F`$, а второе точку $A`$ фигуры $F`$ — в точку $A``$ фигуры $F``$ (рис. 116). Два этих *движения* можно заменить одним *преобразованием*, непосредственно переводящим точку $A$ фигуры $F$ в точку $A``$ фигуры $F``$. При этом различные точки переходят в различные точки.

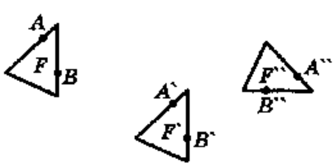


*Рис. 116*

Затем следует показать, что полученное *преобразование* является *движением*, сохраняющим расстояния. Пусть две разные точки $A$ и $B$ первое *движение* переводит в точки $A`$ и $B`$, а второе точки $A`$ и $B`$ — в точки $A``$ и $B``$. Так как при *движении* расстояния сохраняются, то $AB = A`B` = A``B``$, следовательно, полученное *преобразование* является *движением*.

4°. При введении понятия *обратного преобразования* можно использовать рисунок 115. Пусть некоторое *преобразование* переводит фигуру $F$ в фигуру $F`$. При этом *преобразовании* некоторая точка $A$ фигуры $F$ переходит в точку $A`$ фигуры $F`$. Пусть некоторое *преобразование* переводит точку $A`$ фигуры $F'$ — в точку $A$ фигуры $F$. Такое *преобразование* называется *преобразованием, обратным* данному *преобразованию*.

Доказательство свойства движения: *«Преобразование, обратное движению, также является движением»* аналогично доказательству первого утверждения. Пусть две разные точки $A$ и $B$ *движение* переводит в точки $A`$ и $B`$, при этом $AB = A`B`$. *Преобразование, обратное движению* по определению переводит точки $A`$ и $B`$ в точки $A$ и $B$ при этом $A`B` = AB$. Отсюда, так как полученное *преобразование* сохраняет расстояния между точками, то оно является *движением*.

Проверить правильность усвоения определения можно выполнением упражнения:

> Точки $A$ и $B$ при движении переходят в точки $A`$ и $B`$. Чему равно расстояние между точками $A$ и $B$, если $A`B` = 7$ см?

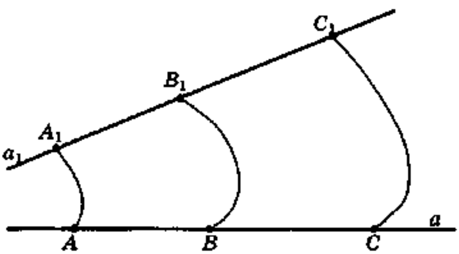



*Рис. 117*

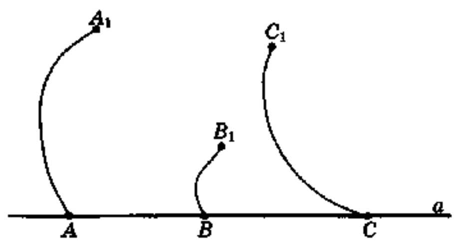



*Рис. 118*

**5°**. Изучение теоремы 9.1 начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 117 по условию теоремы. Проанализируем условие теоремы. Возьмем на прямой $a$ три различные точки: $A$, $B$ и $C$. Пусть для определенности точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, отсюда по аксиоме измерения отрезков следует $AC = AB + BC$. Движение переводит точку $A$ в точку $A_1$, точку $B$ в точку $B_1$, точку $C$ в точку $C_1$, значит, по определению движения $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Затем, выделив в формулировке теоремы условие ($A \in a$, $B \in a$ и $C \in a$, $AC = AB + BC$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$; $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$) и заключение ($A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$), выполним краткую запись:

Дано: $A \in a$, $B \in a$ и $C \in a$,
$AC = AB + BC$;
$A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$;
$AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$

Доказать: $A_1 \in a_1$, $B_1 \in a_1$, $C_1 \in a_1$,
$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$

После этого можно воспроизвести доказательство из учебника. Предположение о том, что точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ не лежат на одной прямой, полезно проиллюстрировать на рисунке 118, а предположение о том, что $B_1$ не лежит между $A_1$ и $C_1$, — на рисунках 119 и 120.

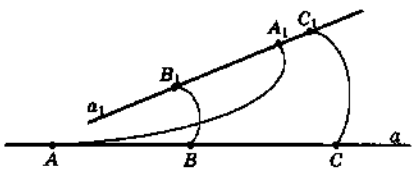



Рис. 119

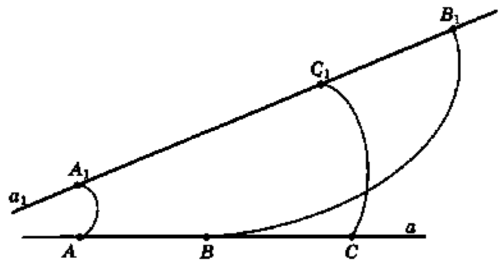



Рис. 120

**6°.** Приведенные в учебнике следствия из теоремы 9.1 необходимы для обоснования равенства фигур через совмещение их движением:

1. *«При движении отрезок отображается на отрезок»*,
2. *«При движении прямая отображается на прямую»*,
3. *«При движении полупрямая отображается на полупрямую»*,
4. *«При движении угол отображается на равный ему угол»*.

Справедливость утверждения *«При движении прямые переходят в прямые»* следует из того, что три точки одной прямой переходят в три точки, лежащие на другой прямой. Для доказательства третьего следствия *«При движении полупрямые переходят в полупрямые»* очень важно, что точки переходят в определенном порядке, поскольку необходимо зафиксировать начало полупрямой. Справедливость первого утверждения *«При движении отрезки переходят в отрезки»* следует из того, что, если некоторая точка $X$ принадлежит отрезку $AB$, то при движении точки $A$ и $B$ перейдут в точки $A_1$ и $B_1$, а точка $X$ в точку $X_1$, принадлежащую отрезку с концами в точках $A_1$ и $B_1$.

При доказательстве утверждения *«При движении угол отображается на равный ему угол»* полезно выписать равенства, следующие из определения движения: $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. После чего из равенства треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ делается вывод о равенстве углов. Доказываемое в учебном пособии утверждение: *«При движении сохраняются углы между полупрямыми»* — фактически означает, что при движении угол переходит в равный ему угол. При его доказательстве полезно выписать равенства, следующие из определения движения: $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

**7°.** Программой не предусмотрено углубленное изучение темы движение плоскости, поэтому для организации домашнего задания контрольные вопросы 1–4 полезно задать без объяснения, какой материал и в каком объеме будет требоваться от учащихся. Однако в процессе проверки домашнего задания следует ограничиться проверкой решения задач и знания формулировок определений, утверждений и теорем, умения на наглядном уровне объяснить введенные термины.

### Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 82, 83; дома — вопросы 1–4 из § 9, задачи 1 и 2.

### Дополнительная задача

**1.** Дана некоторая прямая. Поставим каждой точке плоскости в соответствие ее проекцию на эту прямую. Можно ли сказать, что тем самым мы зададим преобразование?

## Симметрия относительно точки

### Комментарий для учителя

В пункте рассматривается материал, традиционный для любого курса геометрии. В курсе «Наглядная геометрия» в 5–6 классах вводится понятие симметрии относительно точки. В методическом плане понятия, вводимые здесь достаточно просты, поэтому ни подготовительной работы, ни значительной отработки не требуют. Таким образом, большую часть урочного времени можно использовать для решения задач. При этом определенную сложность для учителя представляет необходимость разумного сочетания наглядности с логическими обоснованиями при решении задач.

**Текущие результаты** изучения пункта 84. Учащиеся должны:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* определение *точек и фигур, симметричных относительно точки*;

– *формулировать и объяснять* формулировку теоремы 9.2;

– *объяснять* термин *центральная симметрия*;

– *изображать, обозначать* и *распознавать* на рисунке точки и простейшие фигуры, *симметричные* данным *относительно точки*;

– решать задачи на доказательство и построения, применяя определение *симметрии относительно точки*.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1***. Понятие *точки, симметричной данной относительно точки*, в учебнике вводится конструктивно, тем самым задается правило построения точки, симметричной данной относительно фиксированной точки. При объяснении правила построения полезно вместо рисунка 188 из учебника дать рисунок 121, который выполняется по ходу объяснения.

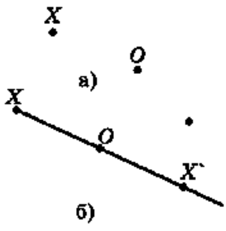


*Рис. 121*

При введении определения *преобразования симметрии относительно точки* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: «...*точка X симметрична точке X` относительно точки O*...», то учащиеся должны записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $OX = OX`$. Если же в условии сказано: « *фигура F симметрична фигуре F` относительно точки O*...», то учащиеся должны понимать, что в этом случае точка $X$ фигуры $F$ переходит в точку $X'$ фигуры $F`$ и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $OX = OX'$.

Как всегда при введении определения следует обратить внимание учащихся на те признаки, которые позволяют из всех преобразований выделить конкретное преобразование, а именно *симметрию относительно точки*. В данном случае это преобразование характеризуется равенством расстояний $OX = OX'$.

На формирование умения *применять* понятия *симметрии относительно точки* можно предложить учащимся несколько простых заданий и вопросов:

1. Дана точка $O$. Постройте точку $A'$, симметричную точке $A$ относительно точки $O$.
2. Какая точка симметрична точке $A'$ относительно точки $O$?
3. Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$, которая является серединой каждого из них. Назовите точку, симметричную точке $A$ (точке $B$, точке C, точке $D$) относительно точки $O$.

*Эти задачи в рабочей тетради представлены под номером 168 и 169. Полезно выполнить задачу 170, которая позволяет проиллюстрировать понятие **симметрии относительно прямой**. Задача 171 более сложная.*

*Затем выполнить упражнение 7 из учебника.*

**2°**. Определенные трудности у учащихся может вызвать построение рисунка и краткая запись условия и заключения теоремы 9.2. Поэтому изучение теоремы 9.2 начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 122 по условию теоремы. Проанализируем условие теоремы: «*Преобразование симметрии относительно точки является движением*». Пусть и $X$ и $Y$ две произвольные точки фигуры $F$. Данное преобразование *симметрии относительно точки* $O$ переводит точку $X$ фигуры $F$ в точку $X'$ фигуры $F'$, а точку $Y$ фигуры $F$ в точку $Y'$ фигуры $F'$. Так как в условии дано *преобразование симметрии относительно точки*, значит $OX = OX'$ и $OY = OY'$. Выполним краткую запись:

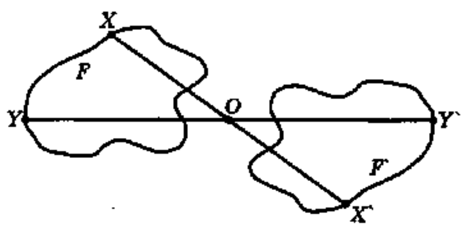


Рис. 122

Дано: $O$ — центр симметрии;
$X \in F, Y \in F$;
$X' \in F', Y' \in F'$;
$X \to X', Y \to Y'$;
$OX = OX', OY = OY'$

Доказать: $XY = X'Y'$.

Конфигурация, получившаяся на рисунке, хорошо знакома учащимся: два отрезка, пересекающиеся в середине. Доказательство равенства, сформулированного в заключении теоремы, со ссылкой на первый признак равенства треугольника учащиеся могут провести самостоятельно.

На прямое применение теоремы можно предложить следующие упражнений:

Точки $A$ и $B$ при симметрии относительно точки $O$ переходят в точки $A'$ и $B'$. Чему равна длина отрезка $A'B'$, если отрезок $AB = 5$ см?

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 84, решить задачи 4, 6, 7, 9 и 10; дома — вопросы 5–9 из § 9, задачи 3, 5, 8 и 11.

## Указания к задачам

**4.** Из точки $B$ проводим дугу радиусом, равным расстоянию от $B$ до $A$, затем из точки $A$ раствором циркуля, равным радиусу, делаем на дуге три последовательные засечки и получаем точку $A'$ (рис. 123). Докажем, что построенная таким образом точка $A'$ симметрична точке $A$ относительно точки $B$. Соединим точку $B$ с засечками и получим три равных равносторонних треугольника. Точка $B$ является вершиной всех трех углов треугольников, их сумма равна 180°. Значит, точки $A$, $B$ и $A'$ лежат на одной прямой и $BA = BA'$ (радиусы одной окружности). По определению симметрии относительно точки, $A'$ симметрична точке $A$ относительно точки $B$.

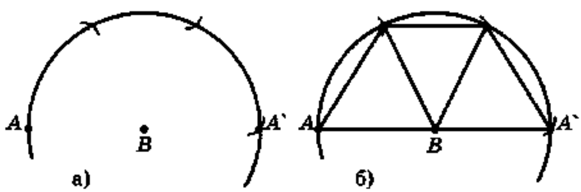


*Рис. 123*

**5.** Пусть $O$ — центр окружности. Возьмем произвольную точку $X$ на окружности и построим точку $X'$, в которую переходит точка при симметрии относительно точки $O$. $OX' = OX = R$, т.е. точка $X'$ лежит на данной окружности. Значит, окружность при симметрии относительно центра $O$ переходит сама в себя, т.е. точка $O$ является центром симметрии окружности.

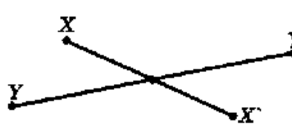
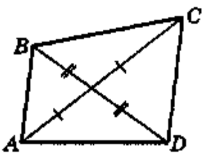


*Рис. 124*

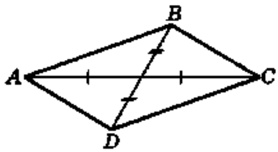
**6.** По определению симметрии относительно точки центром симметрии будет середина отрезка $XX'$—точка $O$ (рис. 124). Затем относительно центра симметрии — точки $O$ — построим точку $Y'$, симметричную точке $Y$.

**7.** Не может. Если бы треугольник имел центр симметрии, то его вершины были бы симметричны относительно этой точки. Но у треугольника три вершины. Поэтому одна из них должна перейти сама в себя, т.е. быть центром симметрии, а две другие симметричны, но в этом случае центр симметрии — середина стороны треугольника.

**8.** Решение следует из свойства диагоналей параллелограмма (теорема 6.2).




а)



б)

Рис. 125

**9.** Вершина четырехугольника не может быть его центром симметрии, так как в противном случае три вершины лежали бы на одной прямой. Поэтому в данном четырехугольнике имеются две пары симметричных друг другу вершин. Отрезки, соединяющие симметричные вершины, пересекаясь в центре симметрии, делятся пополам (рис. 125 а). Поэтому ни один из этих отрезков не является стороной. Значит, эти отрезки — диагонали. По признаку параллелограмма (теорема 6.1) данный четырехугольник является параллелограммом (рис. 125 б).

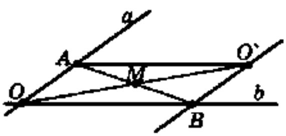



Рис. 126

**10.** Пусть две прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $O$. Соединим точки $O$ и $M$ и на продолжении отрезка $OM$ за точку $M$ отложим отрезок $MO$`, равный $OM$. Через точку $M$ проведем прямые, параллельные данным прямым, до пересечения с ними. Полученный четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм по определению: стороны попарно параллельны. Его диагональ $AB$ и будет искомый отрезок (рис. 126).

## Дополнительные задачи

**1.** Точки $A$, $B$, и $C$, не лежащие на одной прямой, переходят при симметрии относительно точки $O$ соответственно в точки; $A'$, $B'$ и $C'$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

**2.** В треугольнике $ABC$ точка $D$—середина стороны $AC$. Точка $B'$ симметрична $B$ относительно точки $D$. Докажите, что четырехугольник $ABCB'$—параллелограмм.

# Симметрия относительно прямой. Поворот

## Комментарий для учителя

В пунктах 85 и 86 рассматривается материал, традиционный для любого курса геометрии. В курсе «Наглядная геометрия» в 5–6 классах вводится понятие симметрии относительно прямой. В методическом плане понятия, вводимые здесь достаточно просты, поэтому ни подготовительной работы, ни значительной отработки не требуют. Таким образом, большую часть урочного времени можно использовать для решения задач. При этом определенную сложность для учителя представляет необходимость разумного сочетания наглядности с логическими обоснованиями при решении задач.

**Текущие результаты** изучения пунктов 85 и 86. Учащиеся должны:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* определение *точек* и *фигур, симметричных относительно прямой,* и определение *поворота*;

– *формулировать и объяснять* формулировку теоремы 9.3;

– *объяснять* термин *осевая симметрия*;

– *изображать, обозначать* и *распознавать* на рисунке точки и простейшие фигуры, *симметричные* данным *относительно прямой*;

– решать задачи на доказательство и построения, применяя определения *симметрии относительно прямой* и *поворота*.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Понятие *точки, симметричной данной относительно прямой* в учебнике вводится конструктивно, тем самым задается правило построения точки, симметричной данной относительно фиксированной прямой. При объяснении правила построения полезно вместо рисунка 192 из учебника дать рисунок 127, который выполняется по ходу объяснения.

При введении определения *преобразования симметрии относительно прямой* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: *«...точка X симметрична точке X` относительно прямой g...»*, то учащиеся должны записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $AX = AX`$. Если же в условии сказано:

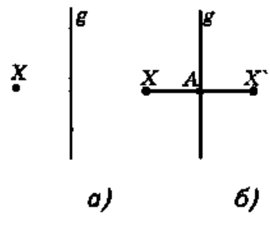



Рис. 127

*«...фигура F симметрична фигуре F` относительно прямой g...»*, то учащиеся должны понимать, что в этом случае точка $X$ фигуры $F$ переходит в точку $X`$ фигуры $F`$ и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $AX = AX`$.

Как всегда при введении определения следует обратить внимание учащихся на те признаки, которые позволяют из всех преобразований выделить конкретное преобразование, а именно *симметрию относительно прямой*. В данном случае это равенство расстояний $AX = AX`$.

На формирование умения <u>*применять*</u> понятия *симметрии относительно прямой* можно предложить учащимся несколько простых заданий и вопросов:

1. Постройте точку $A'$, симметричную точке $A$ относительно прямой $g$.
2. Какая точка симметрична точке $A$ относительно прямой $g$?

***Эти задачи в рабочей тетради представлены под номером 172 1) и 2). Полезно выполнить задачи 173 и 174, которые позволяют проиллюстрировать понятие симметрии относительно прямой.***

Затем выполнить упражнение 14 из учебника.

**2°.** Изучение теоремы 9.3 начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 128 а) по условию теоремы. Проанализируем условие теоремы: *«Преобразование симметрии относительно прямой является движением»*. Пусть и $A$ и $B$ две произвольные точки фигуры $F$. Данное преобразование *симметрии относительно прямой* $g$ переводит точку $A$ фигуры $F$ в точку $A`$ фигуры $F`$, а точку $B$ фигуры $F$ в точку $B`$фигуры $F`$. Так как в условии дано *преобразование симметрии относительно прямой*, значит $AM_1 = A'M_1$ и $BM_2 = B'M_2$. Выполним краткую запись:

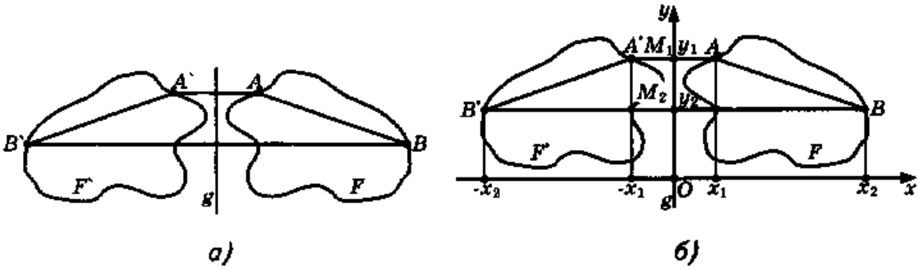



*Рис. 128*

Дано: Прямая $g$ — ось симметрии;

$A \in F, B \in F$;

$A` \in F`, B` \in F`$;

$A \to A`, B \to B`$;

$AM_1 = A'M_1, BM_2 = B'M_2$

Доказать: $AB = A`B`$.

Введем систему координат, в которой за ось $y$ примем данную прямую $g$. Тогда $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $A`(-x_1, y_1)$ и $B`(-x_2, y_2)$ в силу определения *преобразования симметрии относительно прямой*. При введении системы координат по ходу объяснения рисунок 128 а) дополняется необходимыми построениями (рис. 128 б).

По построению видно, что у симметричных точек равные ординаты, а абсциссы различаются только знаком.

После вычислениям по теореме Пифагора длин отрезков $AB$ и $A`B`$ убеждаемся, что они равны. Таким образом, доказано, что при *симметрии относительно прямой* расстояния между точками сохраняются, следовательно, *преобразование симметрии относительно прямой* есть движение.

3°. После доказательства теоремы можно выделить в ее обосновании три этапа.

1. Формулировка условия и заключения теоремы.

2. Введение системы координат, вычисление координат симметричных точек.

3. Вычисление и сравнение длин отрезков, заданных координатами их концов.

На прямое применение теоремы можно предложить следующие упражнения:

Точки $A$ и $B$ при симметрии относительно прямой $g$ переходят в точки $A'$ и $B'$. Чему равна длина отрезка $A'B'$, если отрезок $AB = 3{,}5$ см?

*Эта задача в рабочей тетради представлена под номером 175. Полезно выполнить более сложные задачи 176 и 177.*

4°. В пункте 86 рассматривается еще одно преобразование фигур, являющееся движением: поворот около данной точки $O$. В определении поворота необходимо выделить два его признака:

1) поворот является движением;

2) каждый луч с началом в данной точке поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении. Следует также отметить, что точка $O$ переходит сама в себя.

После введения определения поворота следует разобрать решение задачи 25 по тексту учебника.

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 85 и 86, решить задачи 14, 16, 17, 20 и 25; дома — вопросы 10–15 из § 9, повторить вопросы 6–9 из § 6, вопросы 4 и 5 из § 8, задачи 12, 21, 22 и 26.

## Указания к задачам

13. Даны три точки $A$, $B$, и $C$ (рис. 129 *а*). Из точки $A$ проводим дугу радиусом, равным расстоянию от $C$ до $A$, затем из точки $B$ проводим дугу радиусом, равным расстоянию от $C$ до $B$, точки пересечения этих двух дуг с $C$ и $C'$ (рис. 129 *б*). Докажем, что построенная таким образом точка $C_1$ симметрична точке $C$ относительно прямой $AB$. Треугольники $ABC$ и $ABC_1$ равны по трем сторонам ($AB$ — общая, $CB$ и $C_1B$ — радиусы одной окружности,$CA$ и $C_1A$ — радиусы одной окружности) (рис. 129 в). Точка $K$ — точка пересечения прямых $AB$ и $CC_1$. Из равенства треугольников следует$\angle CBK = \angle C_1BK$. Треугольники $CBK$ и $C_1BK$ равны по двум сторонам и углу между ними ($BK$ — общая, $CB$ и $C_1B$ — радиусы одной окружности, $\angle CBK = \angle C_1BK$ по доказанному выше). Отсюда, $CK = C_1K$ и $\angle CKB = \angle C_1KB$. Равные углы $CKB$ и $C_1KB$ — смежные, следовательно, они прямые. Таким образом, точки С и $C_1$ симметричны относительно прямой $AB$ по определению.

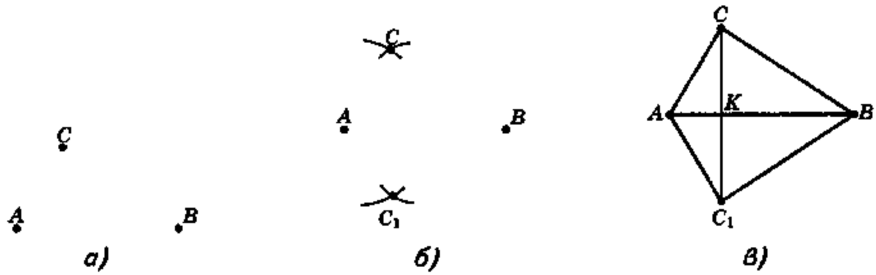



*Рис. 129*

**14.** Полезно не только построить точки, но и записать их координаты.

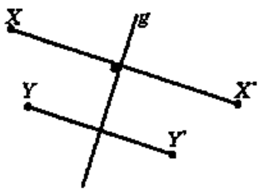



*Рис. 130*

**15.** Осью $g$ симметрии будет серединный перпендикуляр к отрезку $XX'$—прямая $g$ (рис. 130). Затем относительно оси симметрии — прямой $g$— построим точку $Y'$, симметричную точке $Y$.

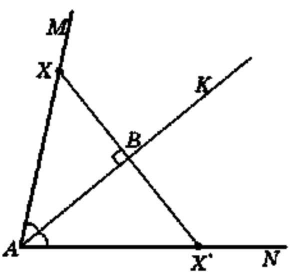



*Рис. 131*

**16.** Пусть $AK$ — прямая, содержащая биссектрису угла $MAN$ (рис. 131). Возьмем точку $X$ на стороне $AM$ и построим симметричную ей точку $X'$ относительно прямой $AK$. Треугольники $ABX$ и $ABX'$ равны по двум катетам ($AB$ — общий, $BX = BX'$ по определению симметрии относительно прямой). Из равенства треугольников следует $\angle XAB = \angle X'AB$. Значит, угол $X'AB$ равен углу $NAB$ и по аксиоме откладывания углов (аксиома VI) $AX'$ и $AN$ совпадают, т.е. точка $X'$ лежит на стороне $AN$ угла $MAN$. А это значит, что угол $MAN$ при симметрии относительно биссектрисы переходит сам в себя. Следовательно, прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии. Вершина угла $A$ лежит на оси симметрии и переходит сама в себя.

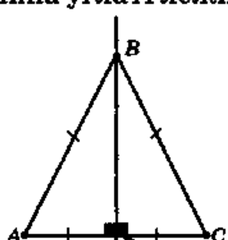



*Рис. 132*

**17.** Рассмотрим симметрию относительно прямой $BD$ (рис. 132), содержащей медиану равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$). По свойству равнобедренного треугольника $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Следовательно, точки $A$ и $C$ симметричны. Точка $B$ переходит в себя, так как она лежит на прямой $BD$. Значит, вершины треугольника переходят в вершины того же треугольника, и по следствию из теоремы 9.1: «*При движении отрезки переходят в отрезки*» — стороны треугольника перейдут в его стороны, т.е. треугольник при рассматриваемой симметрии перейдет сам в себя.

**18.** 1) По следствию из теоремы 9.1 отрезок переходит в отрезок, значит, вершина треугольника должна перейти в его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т.е. лежать на оси симметрии.

2) По теореме 9.2 осевая симметрия сохраняет расстояния, значит, стороны треугольника, переходящие друг в друга, должны иметь равные длины — треугольник равнобедренный.

**19.** По доказанному в задаче 17 прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, является его осью симметрии. Значит, равносторонний треугольник имеет три такие оси симметрии. А по доказанному в задаче 18 (1) ось симметрии должна проходить через вершину треугольника, следовательно, других осей симметрии нет.

**21.** Полезно уточнить формулировку задачи: «Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии». По теореме 6.5 диагонали ромба являются его биссектрисами и тогда по доказанному в задаче 16 будут его осями симметрии.

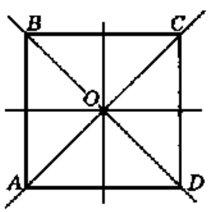


Рис. 133

**22.** Диагонали квадрата равны и при пересечении делятся пополам (теоремы 6.4 и 6.1). Поэтому треугольники $AOD$ и $BOC$ равнобедренные (рис. 133) и их высоты являются одновременно и медианы, значит, служат осями симметрии отрезков $AD$ и $BC$ (задача 17). Стороны $AD$ и $BC$ переходят сами в себя. При этом точка $A$ переходит в точку $D$, точка $D$ переходит в точку $A$, точка $B$ переходит в точку $C$, точка $C$ переходит в точку $B$. Но по следствию из теоремы 9.1: «*При движении отрезки переходят в отрезки*» — отрезок $AB$ перейдет в отрезок $DC$ и наоборот. Следовательно, квадрат $ABCD$ переходит сам в себя при данной осевой симметрии.

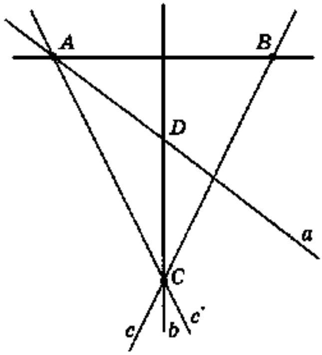


Рис. 134

**24.** В результате преобразования симметрии относительно прямой $b$ прямая $c$ перейдет в прямую $c`$ и пересечет прямую $a$ в точке $A$. Из точки $A$ опустим перпендикуляр на прямую $b$ и продолжим его до пересечения с прямой $c$ в точке $B$. Отрезок $AB$ — искомый отрезок рис. 134). Докажем это. По следствию из теоремы 9.1: «*При движении отрезки переходят в отрезки*», значит, отрезок $BC$ перейдет в равный ему отрезок $CA$. Следовательно, треугольник $ACB$ — равнобедренный. Так как $AB \perp KC$, то по свойству равнобедренного треугольника $CK$ —медиана и $AK = BK$.

Задача не всегда имеет решение. Если $\angle BCK = \angle ADK$, то при преобразовании симметрии в силу следствия из теоремы 9.1: «*При движении углы переходят в равные углы*» — $\angle KCA = \angle KCB = \angle KDA$, тогда по признаку параллельности прямых $a \parallel c'$. Следовательно, в этом случае задача не имеет решения.

## Параллельный перенос и его свойства

### Комментарий для учителя

Традиционно понятие *параллельного переноса* вводится с опорой на вектор, как направленный отрезок. Понятие *параллельного переноса* в этом учебнике вводится в координатной форме, что позволяет применить координатный метод при обосновании свойств *параллельного переноса*. Применение координатного метода значительно упрощает доказательство свойств и делает его более наглядным.

**Текущие результаты** изучения пункта 87. Учащиеся должны:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* понятие *параллельного переноса*;

– *формулировать и объяснять* формулировки свойств *параллельного переноса*;

– *воспроизводить* формулы, задающие *параллельный перенос*;

– решать задачи на доказательство и построения, применяя понятие *параллельного переноса* и его свойства.

## Методические рекомендации к изучению материала

1°. В доказательстве утверждения: «*Параллельный перенос есть движение*» и свойств параллельного переноса используются ссылки на признак и свойства параллелограмма, а также здесь используются понятия координат точки, формула расстояния между двумя точками, формулы для нахождения координат середины отрезка. Поэтому перед началом объяснения формулировок и доказательства утверждений данного пункта целесообразно повторить с учащимися формулировки этих теорем и формул. При этом полезно в виде рисунков или формул зафиксировать их на доске и сохранять до конца работы над доказательством сформулированных утверждений (рис. 135):

1. *признак* параллелограмма (рис. 135 а),
2. *свойства сторон* параллелограмма (рис. 135 б),
3. понятие *координат* точки (рис. 135 в).

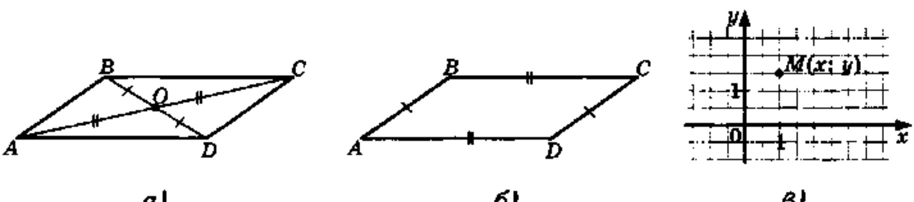



Рис. 135

4. Для точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

Формула расстояния: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ,

Формула середины отрезка: $x = \dfrac{x_2 + x_1}{2}$, $y = \dfrac{y_2 + y_1}{2}$.

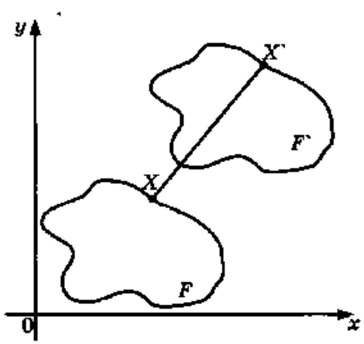



Рис. 136

1°. При введении понятия *параллельный перенос* полезно сделать рисунок (рис. 136), указав на нем точки $X$ и $X`$ без координат. В замечании, сделанном в учебнике, говорится, что при *параллельном переносе* точки сдвигаются на одно и тоже расстояние. Поэтому можно представить, что мы передвигаем фигуру $F$ по плоскости.

Понятие *параллельный перенос* в учебнике вводится конструктивно в координатной форме. Тем самым задается правило построения точки, в которую переходит данная точка при *параллельном переносе*. При объяснении правила построения полезно вместо рисунка 199 из учебника дать рисунок 136, который дополняется по ходу объяснения координатами точек $X$ и $X$`.

При введении понятия *параллельный перенос* необходимо обратить внимание учащихся на понимание того, что, если в условии сказано: «...формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$ задан *параллельный перенос* ...», то учащиеся должны понимать, что в этом случае точка $X$ ($x$, $y$) фигуры $F$ переходит в точку $X'$ ($x'$, $y'$) фигуры $F'$. А в ходе решения задачи или в краткой записи условия записать: $x_2 = x_1 + a$, $y_2 = y_1 + b$.

На формирование умения применять понятия *параллельного переноса* можно предложить учащимся упражнение типа 28 из учебника:

> Параллельный перенос задается формулами: (рис. 137).
> $x_2 = x_1 + 14$, $y_2 = y_1 + 4$.
> 1. В какие точки при этом параллельном переносе перейдут точки $A(-3, 2)$ и $B(5, -3)$?
> 2. Постройте точки $A$ и $A'$, $B$ и $B'$; и каждую пару точек соедините отрезком.

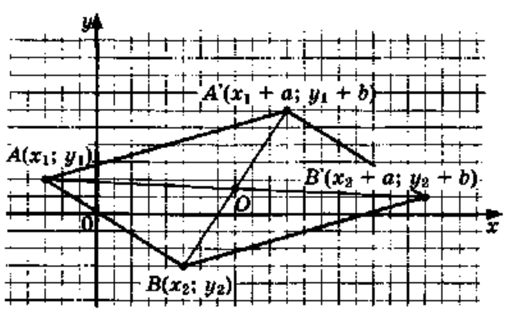



*Рис. 137*

**2***. Если на рисунке, полученном в результате решения выше приведенной задачи, записать координаты в общем виде, то его можно использовать для доказательства свойства параллельного переноса: «*при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние*» (рис. 137).

Доказательство этого свойства достаточно просто. Необходимо найти координаты середин отрезков $AB'$ и $A'B$. Так как они совпадают, можно сделать вывод, что диагонали четырехугольника $AA'B'B$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит, $AA'B'B$ — параллелограмм, а у параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны. Из равенства и параллельности сторон $AA'$ и $B'B$ следует, что точки $A$ и $B$ сместились по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Из равенства и параллельности сторон $AB$ и $A'B'$ следует, что *параллельный перенос сохраняет расстояния между точками* и, следовательно, является *движением*.

**3°.** В приведенном доказательстве предполагалось, что точка $B$ не лежит на прямой $AA'$. Если же точка $B$ принадлежит прямой $AA'$ (рис. 201 из учебника), точки $A$ и $B$ также смещаются на одно и то же расстояние ($AA' = BB'$) по одной и той же прямой ($B'$ принадлежит прямой $AA'$). Докажем это. Так как точка $B$ лежит на прямой $AA'$, значит, на этой же прямой лежит точка $O$ — середина отрезка $A'B$. Отсюда следует, точки $A$, $A'$, $O$ и $B$ лежат на этой же прямой. Совпадение середин отрезков $AA'$ и $B'B$ доказывает, что все точки $A$, $A'$, $B$ и $B$` лежат на одной прямой. Равенство отрезков определяется по формуле длины отрезка.

На формирование умения *применять* свойства *параллельного переноса* можно предложить учащимся задачу типа 27 из учебника с обязательной записью решения в тетради.

> *В рабочей тетради к этому пункт рекомендуются задачи 178–181.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 87, решить задачу 27; дома — вопросы16, 17 из § 9, задачи 28 и 29.

## Указания к задачам

Задача 27 сводится к построению параллелограмма $ABC'C$ по трем вершинам $A$, $B$ и $C$, если точка $C$ не принадлежит отрезку $AB$. Ее можно решить двумя способами.

<u>1-й способ</u> основывается на свойстве сторон параллелограмма. Так как *«при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние»*, то через точку $C$ проведем прямую, параллельную $AB$; а через точку $B$ проведем прямую, параллельную $AC$. Точка $C'$ пересечения этих прямых будет искомой. Доказательство следует из свойства сторон параллелограмма.

<u>2-й способ</u> основывается на свойстве диагоналей параллелограмма. Через середину отрезка $BC$ — точку $O$ провести луч $AO$; от точки $O$ отложить отрезок $OC'$, равный $OA$. Точка $C'$ будет искомой. Доказательство: по признаку параллелограмма построенный четырехугольник — параллелограмм. По свойству сторон параллелограмма $CC' \parallel AB$ и $CC' = AB$.

Если точка $C$ принадлежит отрезку $AB$, то для построения точки $C'$ надо на луче $AB$ от точки $C$ отложить отрезок, равный $AB$.

## Дополнительные задачи

**1.** Параллельный перенос задан формулами $x' = x + 1$, $y' = y - 2$. Постройте фигуру, в которую перейдет треугольник с вершинами $A$ (3, 3), $B$ (0, 1), $C$ (−1, 2) при этом параллельном переносе.

**2.** При параллельном переносе, заданном формулами $x' = x + 4$, $y' = y + 3$, вершина $A$ квадрата $ABCD$ переходит в точку $B$. Найдите диагональ этого квадрата.

**3.** Параллельный перенос переводит конец $A$ отрезка $AB$ в точку $A'$, принадлежащую прямой $AB$. Постройте отрезок, в который перейдет отрезок $AB$ при этом параллельном переносе.

**4.** Точка $M$ отрезка $AB$ при некотором параллельном переносе переходит в точку $M'$. Постройте отрезок, в который переходит отрезок $AB$ при этом параллельном переносе.

# Существование и единственность параллельного переноса. Сонаправленность полупрямых

## Комментарий для учителя

Теорема о существовании и единственности параллельного переноса (теорема 9.4) используется для обоснования утверждения, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.

**Текущие результаты** изучения пункта 88. Учащиеся должны:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* формулировку теоремы 9.4;

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* определения *одинаково направленных* (*сонаправленных*) *полупрямых* и *противоположно направленных полупрямых*;

– *решать* задачи на применение введенных в этом параграфе движений.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°**. Приступая к изучению *теоремы* 9.4, следует обратить внимание учащихся на то, что теорема о *существовании и единственности параллельного переноса*, содержит два утверждения: существование *параллельного переноса* (*каковы бы ни были две точки A и A` существует параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A`*) и его единственность (*один и только один*). Поэтому доказательство каждой части теоремы целесообразно провести отдельно, как самостоятельную теорему. Заметим, что, при доказательстве каждой части используются разные методы: существование доказывается координатным методом, а единственность *параллельного переноса* конструктивно.

Доказательство единственности можно провести с учащимися в ходе повторного рассмотрения решения задачи 27, если она была выполнена на предыдущем уроке.

Каждый этап построения полезно сопроводить обсуждением вопроса о его единственности. Таким образом доказывается, что параллельный перенос, переводящий точку $A$ в точку $B$, переводит точку $C$ в точку $C'$, однозначно определенную параллельным переносом.

После доказательства теоремы о *существовании и единственности параллельного переноса* полезно сделать вывод: «*Параллельный перенос* может быть задан двумя способами: координатными формулами или парой точек $A \to A'$».

На применение теоремы о *существовании и единственности параллельного переноса*, можно предложить задачу 31 из учебника.

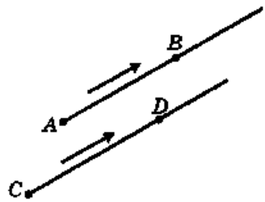


Рис. 138

2°. Понятие *одинаково направленных* (*сонаправленных*) *полупрямых* полезно ввести на наглядном уровне (рис. 138). Проведем полупрямую $AB$ и отметим с помощью стрелочки направление от ее начальной точки $A$ к точке $B$, принадлежащей этой полупрямой. Затем проведем вторую полупрямую $CD$ и тоже отметим с помощью стрелочки направление от ее начальной точки $C$ к точке $D$, принадлежащей этой второй полупрямой.

Вместе с данным в учебнике вербальным определением *одинаково направленных* (*сонаправленных*) *полупрямых* полезно дать также их конструктивное определение, т.е. показать учащимся, что полупрямую *одинаково направленную* (*сонаправленную*) с данной *полупрямой* можно построить путем параллельного переноса данной полупрямой.

Как всегда при введении определения следует обратить внимание учащихся на те признаки, которые позволяют из всех полупрямых выделить *одинаково направленные* (*сонаправленные*) *полупрямые*. В данном случае в силу определения *одинаково направленные полупрямые* 1) лежат на параллельных прямых или на одной и той же прямой; 2) существует параллельный перенос, который переводит эти полупрямые друг в друга.

3°. Доказательство утверждения «*Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые a и c одинаково направлены, то полупрямые b и c тоже одинаково направлены*» достаточно простое и его можно в качестве задачи предложить одному из успешных учеников. При его доказательстве используется координатный метод. Формулами задается параллельный перенос, который переводит прямую $a$ в прямую $b$ и параллельный перенос, который переводит прямую $b$ в прямую $c$. Затем строится параллельный перенос, который непосредственно переводит прямую $a$ в прямую $c$.

**4°.** Решение задачи 32, приведенное в учебнике, является примером задачи на подведение под определение. Из условия задачи известно, что прямые $AB$ и $CD$ параллельны. Зададим параллельный перенос, который определяется парой точек $C \to B$. Таким образом, имеются две полупрямые, которые совмещаются параллельным переносом.

**5°.** После введений определения *противоположно направленных полупрямых* полезно дать рисунок, аналогичный рисунку 138, но с разным направлением полупрямых от их начальных точек. При этом полезно обратить внимание учащихся на то, что *противоположно направленные полупрямые* (так же как и *одинаково направленные полупрямые*) лежат на параллельных прямых либо на одной и той же прямой.

Затем полезно рассмотреть задачу 33.

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 88, решить задачи 31, 32 и 33; дома — вопросы 18–21 из § 9, задачи 30 и 34.

## Указания к задачам

**31.** Первая пара точек определяет параллельный перенос, и притом единственный по теореме о *существовании и единственности параллельного переноса.* Поэтому после получения формул параллельного переноса, определенного первой парой точек (см. задачу 29), проверяем, удовлетворяют ли этим формулам координаты точек второй пары; если да, то искомый параллельный перенос существует, если нет — не существует.

## Дополнительная задача

**1.** Запишите формулы параллельного переноса, являющегося результатом двух последовательно выполненных параллельных переносов, задаваемых формулами: а) $x' = x + 3$, $y' = y - 2$ и $x'' = x' - 2$, $y'' = y'$.

## Геометрические преобразования на практике

Говоря о прикладных вопросах геометрических преобразований, как правило, говорят об их применении в прикладных народных искусствах. В узорах применяются симметрии, параллельный перенос, поворот. Цель данного параграфа: показать, что, используя знания, полученные в школьном курсе геометрии, можно решить достаточно сложные практические задачи. В пункте рассматривается задача о кратчайшем расстоянии, при решении которой используется *параллельный перенос*.

Поскольку тема параграфа, как было отмечено в комментариях к параграфу, дается в ознакомительном плане, то планирование урока следует выполнить учителю исходя из уровня геометрической подготовки класса.

> *В рабочей тетради к этому пункт приведены две задачи 182 и 183 с решениями. Они аналогичны задачам пункта 89.*

## Равенство фигур

### Комментарий для учителя

Как было сказано в комментариях к параграфу, введение в номенклатуру содержания и примерной программы темы «Движение» обосновано тем, что, опираясь на неё, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. В этом пункте доказывается, что равенство треугольников: первое — через равенство сторон и углов треугольников, второе — их совмещение движением, равносильны. Доказательство равносильности двух определений равенства треугольников проводится в ознакомительном порядке.

**Текущие результаты** изучения пункта 88. Учащиеся должны:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* определение *равных фигур, совмещаемых движением*;

– *объяснять* равносильность равенства треугольников;

– *решать* задачи на применение введенных в этом параграфе движений.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** Перед началом объяснения формулировки *равных фигур, совмещаемых движением* и доказательства равносильности двух определений равенства треугольников целесообразно повторить с учащимися определения равных отрезков, углов, треугольников. При этом полезно в виде рисунков зафиксировать их на доске и сохранять до конца объяснения (рис. 139):

1. определение *равенства отрезков* (рис. 139 а),
2. определение *равенства углов* (рис. 139 б),
3. определение *равенства треугольников* (рис. 129 в).

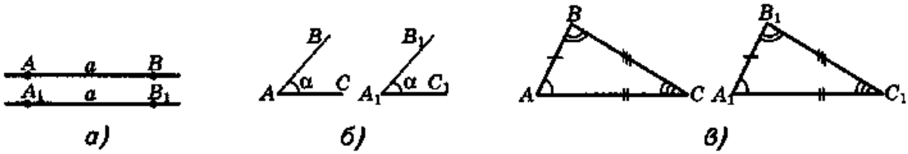



Рис. 139

**2°.** Введение определения *равенства фигур, определяемого через их совмещение,* предполагает, как и *равенство фигур, определяемое через равенство их сторон и углов*, упорядоченность вершин. Другими словами, если в условии сказано: «...$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$...», то учащиеся должны понимать, что в этом случае вершина $A$ треугольника $ABC$ переходит в вершину $A_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, вершина $B$ — в вершину $B_1$, вершина $C$ — в вершину $C_1$.

**3°.** Утверждение о том, что равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство этих же треугольников, определяемое через равенство их сторон и углов, одно и то же равенство и содержит в себе два утверждения: прямое и обратное.

I. Дано: существует движение, при котором треугольник $ABC$ совмещается с треугольником $ABC$, причем вершина $A$ треугольника $ABC$ переходит в вершину $A_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, вершина $B$ — в вершину $B_1$, вершина $C$ — в вершину $C_1$. Доказать, что верны равенства:

$$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1.$$

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$

II. Дано: для треугольников $ABC$ и $ABC$ выполняются равенства:

$$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1.$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1;$$

Доказать, что треугольник $ABC$ совмещается с треугольником $ABC$ некоторым движением, причем вершина $A$ треугольника $ABC$ переходит в вершину $A_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, вершина $B$ — в вершину $B_1$, вершина $C$ — в вершину $C_1$.

Доказательство, данное в учебнике, достаточно подробно и не требует дополнительных разъяснений.

**4°.** В конце методических рекомендаций к параграфу приведены самостоятельная работа в форме теста и традиционная контрольная работа. Учитель может сам определить, в какой форме удобнее провести тематический контроль.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить при повторении темы и подготовке к контрольной работе выполнить упражнения 184–187.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 90, решить задачу 44; дома — вопрос 21 из § 9, задачи 43, 45 и 34.

## Указания к решению задач

**36.** Проведем диагонали в данных параллелограммах и обозначим точки их пересечения через $O$ и $O_1$. Треугольники $ABD$ и $A_1B_1D_1$ равны по первому признаку. Ранее мы доказали, что существует движение, переводящее $\Delta ABD$ в $\Delta A_1B_1D_1$. При этом вершина $A$ треугольника $ABC$ переходит в вершину $A_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, вершина $B$ — в вершину $B_1$, вершина $C$ — в вершину $C_1$. Проверим, в какую точку переходит точка $C$. Отрезки $AO$ и $A_1O_1$ — медианы в равных треугольниках, и нетрудно показать, что они переходят друг в друга.

По следствию из теоремы **9.1** полупрямая $AC$ перейдет в полупрямую $A_1C_1$. Но так как движение сохраняет расстояния, то точка $C$ перейдет в точку $C_1$, т.е. параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются движением и, следовательно, равны.

**37.** Дано: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — ромбы.

$AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$.

Доказать: $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

Рассмотрим движение, переводящее полупрямую $AC$ в полупрямую $A_1C_1$. Поскольку $AC = A_1C_1$, то точка $C$ при этом перейдет в точку $C_1$. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и, пересекаясь, делятся пополам. Поэтому точка $O$ перейдет в точку $O_1$. Так как при движении сохраняются углы между полупрямыми, то либо $OB$ перейдет в $O_1B_1$, а $OD$ — в $O_1D_1$, либо $OB$ перейдет в $O_1D_1$, а $OD$—в $O_1B_1$. В любом случае ромб $ABCD$ перейдет в ромб $A_1B_1C_1D_1$.

Примечание. Можно решить задачу указанием двух последовательно выполненных движений, переводящих эти ромбы друг в друга; например, симметрия относительно середины отрезка $OO_1$, а затем поворот на угол $COC_2$, где $C_2$ — точка, в которую перешла точка $C_1$ при указанной симметрии.

**38.** Обозначим центры окружностей через $O$ и $O_1$, а их радиусы через $R$. Рассмотрим движение, переводящее точку O в точку $O_1$, например, симметрию относительно середины отрезка $OO_1$. Произвольная точка $X$ первой окружности расположена на расстоянии $R$ от точки $O$. Следовательно, по определению движения точка $X_1$, в которую переходит точка $X$, должна находиться на расстоянии $R$ от точки $O_1$, т.е. принадлежать второй окружности. Таким образом, при данном движении окружности совместились.

## Самостоятельная работа по теме: « Движение»

### *1-й вариант*

**1.** Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.

1. центральная симметрия (указать центр);
2. поворот (указать угол и направление);
3. осевая симметрия (указать ось);
4. параллельный перенос (указать вектор).

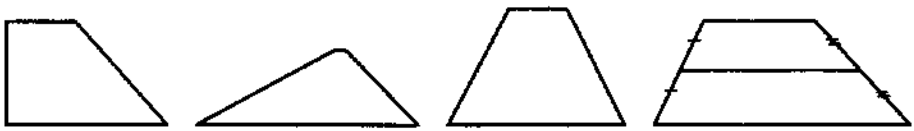
**2.** Треугольник имеет три оси симметрии. Определите вид треугольника.

1. разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

**3.** Определите, сколько осей симметрии имеет квадрат.

*Ответ:* ______________________

**4.** По данным рисунка, определите, какие среди приведенных ниже трапеций имеют оси симметрии. Укажите номера этих рисунков в ответе.



*1)* *2)* *3)* *4)*

*Ответ:* ______________________

**5.** Угол $ABC$, равный $\alpha$ ($\alpha < 90°$), нри повороте на 90° в направлении от $A$ к $C$ переходит в угол $A_1BC_1$. Найдите угол $ABC_1$.

*Ответ:* ______________________

**6.** Дан треугольник $ABC$. При центральной симметрии относительно вершины $C$ его вершина $A$ перешла в точку $D$, а вершина $B$ — в точку $F$. Определите взаимное расположение прямых, содержащих биссектрисы $CM$ и $CN$ треугольников $ABC$ и $FDC$.

1. прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые совпадают;
4. прямые параллельны.

**7.** В треугольнике $ABC$ вершина $B$ симметрична точке $K$ относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине $A$. Найдите отрезок $CK$, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

*Ответ:* ______________________

8. Точка $F$ — середина стороны $AC$ в треугольнике $ABC$. При симметрии относительно точки $F$ вершина $B$ переходит в точку $D$. Найдите отношение периметра треугольника $ABC$ к периметру четырехугольника $ABCD$, если $AB = 5$ см, $BC = 8$ см и $AC = 9$ см. Сделайте рисунок.

*Ответ:* ____________________

9. При повороте на угол 90° вокруг точки пересечения диагоналей параллелограмм перешел сам в себя. Определите его вид.

*Ответ:* ____________________

*2-й вариант*

1. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.

1. центральная симметрия (указать цент);
2. поворот (указать угол и направление);
3. осевая симметрия (указать ось);
4. параллельный перенос (указать вектор).

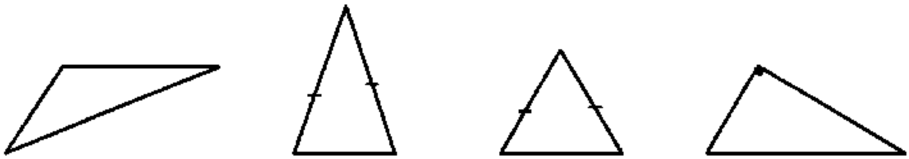
2. Треугольник имеет ровно одну ось симметрии. Определите вид треугольника.

1. разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

3. Определите, сколько осей симметрии имеет ромб.

*Ответ:* ____________________

**4.** Определите, какие из приведенных ниже треугольников имеют оси симметрии. Укажите номера этих треугольников в ответе.



1) 2) 3) 4)

**5.** Угол $ABC$, равный $\alpha$ ($\alpha < 90°$), при повороте на $90°$ в направлении от $A$ к $C$ переходит в угол $A_1BC_1$. Найдите угол $CBA_1$.

*Ответ:* ____________________

**6.** Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника $ABC$ параллельным переносом. Определите взаимное расположение прямых, содержащих их медианы $BD$ и $B'D'$.

1. прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые совпадают;
4. прямые параллельны.

**7.** В треугольнике $ABC$ вершина $B$ симметрична точке $K$ относительно биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине $A$. Найдите отрезок $CK$, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

*Ответ:* ____________________

**8.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = BC$). При осевой симметрии относительно прямой, содержащей сторону $AC$ треугольника $ABC$, вершина $B$ переходит в точку $D$. Найдите отношение периметра треугольника $ABC$ к периметру четырехугольника $ABCD$, если $AB = 8$ см и $AC = 10$ см. Сделайте рисунок.

*Ответ:* ____________________

**9.** Определите, на какой угол, отличный от нулевого, нужно повернуть прямую вокруг точки, не принадлежащей этой прямой, чтобы получить прямую, параллельную исходной.

*Ответ:* ____________________

## Самостоятельная работа по теме: « Движение»

*1-й вариант*

**1°.** Дан треугольник $DFG$. Постройте треугольник, симметричный треугольнику $DFG$ относительно точки $G$.

**2°.** Параллельный перенос задан формулами $x_1 = x + 2$; $y_1 = y - 3$. Постройте фигуру, в которую перейдет отрезок с концами в точках $A(-2,\ 3)$ и $B(3,\ 3)$ при этом параллельном переносе и запишите координаты точек, в которые перейдут точки $A$ и $B$.

**3°.** При симметрии относительно прямой $a$ отрезок $LM$ переходит в отрезок $KN$. Прямые $a$ и $LM$ не параллельны. Определите вид четырехугольника $LMNK$.

**4.** Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

**5.** Дан прямоугольный равнобедренный треугольник $ABC$. Определите, какая получится фигура при симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его катет.

*2-й вариант*

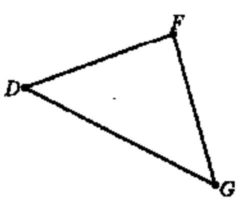



*Рис. 130*

**1°.** Дан треугольник $ABC$. Постройте треугольник, симметричный треугольнику $ABC$ относительно прямой BC.

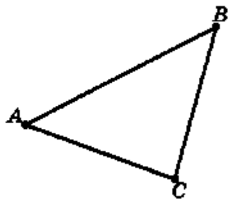


Рис. 131

**2°.** Отрезок с концами в точках $A(2, 7)$ и $B(3, 9)$ при параллельном переносе перейдет в отрезок с концами в точках $G(-2, 4)$ и $F(-1,6)$. Какими формулами задан этот параллельный перенос? Сделайте рисунок к задаче.

**3°.** При симметрии относительно точки $O$ отрезок $DC$ переходит в отрезок $FG$. Точка $O$ не принадлежит отрезку $DC$. Определите вид четырехугольника $DCFG$.

**4.** Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

**5.** Дан прямоугольный равнобедренный треугольник $ABC$. Определите, какая получится фигура при симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его гипотенузу.

# § 10. ВЕКТОРЫ

Содержание темы «Векторы» в курсе геометрии ограничено знакомством учащихся с понятием вектора и полностью сосредоточено в этом параграфе; далее в курсе планиметрии векторный аппарат не используется. Кроме того, изучение векторов в некоторой степени должно удовлетворить потребности курса физики. Основной целью изучения векторов в данном курсе является знакомство учащихся с одним из эффективных методов геометрии *векторным методом* решения задач. Понятие *«вектор»* вводится на основе естественного и наглядного представления о направленном отрезке. При этом основное внимание следует уделить формированию у учащихся умений выполнять действия над векторами в координатных и геометрических формах.

**Планируемые итоговые результаты изучения § 10:**

Учащиеся должны научиться:

– *изображать* на чертежах и рисунках векторы;

– *оперировать* с векторами: находить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически, находить вектор, равный произведению заданного вектора на число;

– *находить* для векторов, заданных координатами: длину вектора, координаты суммы и разности двух и более векторов, координаты произведения вектора на число, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;

– *вычислять* скалярное произведение векторов, находить угол между векторами, устанавливать перпендикулярность прямых.

Учащиеся получат возможность научится:

– *овладеть* векторным методом для решения задач на вычисления и доказательства.

## Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов

### Комментарий для учителя

1. При введении понятия *«вектор»* следует напомнить учащимся, что в курсе физики рассматривались векторные величины — перемещение тела и скорость, характеризуемые не только

числом, но и направлением. Понятие вектора вводится на интуитивно-наглядном уровне: *«Направленный отрезок называется вектором»*, рассматриваются две основные характеристики вектора — его *абсолютная величина* (*модуль*) и *направление*, определяется равенство векторов.

**Текущие результаты** изучения пунктов 91 и 92. Учащиеся должны:

– *изображать* и *обозначать* на чертежах и рисунках *вектор*;

– *откладывать* от любой точки вектор, равный данному;

– *определять* начало и конец *вектора* в записи и на чертеже;

– *формулировать, объяснять и иллюстрировать* определения: *вектора*, *одинаково* и *противоположно направленных векторов, равных векторов*;

– *объяснять* понятие *абсолютной величины* (*модуля*) *вектора*;

– *формулировать* и *объяснять* необходимое и достаточное условия равенства векторов;

– *решать* задачи, применяя полученные знания.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°**. Объяснение материала удобно организовать в форме беседы через систему упражнений. После выполнения каждого из них или в процессе решения формулируются определения, вводится новая терминология, объясняются правила.

Формулировка: «*Направленный отрезок называется вектором*» — опирается на рисунок 213 из пункта 91 учебника. Одновременно с определением вектора вводятся и соответствующие обозначения вектора.

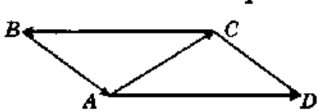



*Рис. 140*

На закрепление определения *вектора* можно выполнить следующие упражнения:

1. Запишите все векторы, изображенные на рисунке 140.

2. Изобразите векторы $\overline{DA}$ , $\overline{DB}$ .

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение вектора. А затем выполнить задания 189 и 190.*

**2°**. При введении определения *одинаково направленных векторов* и *противоположно направленных векторов* полезно напомнить учащимся определения *одинаково* и *противоположно* *направленных полупрямых*. При этом, следует обратить внимание учащихся на то, что полупрямые лежат на параллельных прямых или на одной и той же прямой.

Определение *одинаково направленных векторов* и *противоположно направленных векторов* полезно сопроводить упражнением на распознавание:

Четырехугольник $ABCD$ — трапеция. Используя обозначения, данные на рисунке 141:

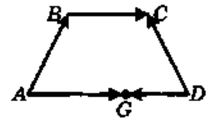


Рис. 141

1. Укажите пары одинаково направленных векторов.

2. Укажите пары противоположно направленных векторов.

3. Являются ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ одинаково направленными?

При ответе на вопросы следует обсудить: почему векторы *одинаково направлены* или *противоположно направлены*. При ответе на первый вопрос: векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ *одинаково направлены*, так как полупрямые $AD$ и $BC$ *одинаково направлены*, векторы $\overline{AD}$, $\overline{AG}$ и $\overline{GD}$ *одинаково направлены*, так как полупрямые $AD$, $AG$ и $GD$ *одинаково направлены*. При ответе на второй вопрос: векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$ *противоположно направлены*, так как полупрямые $AD$ и $CB$ *противоположно направлены*, векторы $\overline{AD}$ и $\overline{DG}$ *противоположно направлены*, так как полупрямые *противоположно направлены*. В третьем вопросе заложен контр пример. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ не являются ни *одинаково направленными*, ни *противоположно направленными*, так как не лежат ни на *одинаково направленных*, ни на *противоположно направленных* полупрямых.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение **одинаково и противоположно направленных векторов**. А затем выполнить задание 191.*

3°. После введения определения *абсолютной величины* (*модуля*) *вектора*, на формирование умения *применять* его можно предложить учащимся упражнение:

В прямоугольнике $ABCD$ стороны $AB$ и $AD$ соответственно равны 8 см и 15 см. Определите, чему равны абсолютные величины векторов $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ (рис. 142).

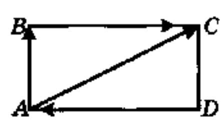


Рис. 142

> ***В рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение абсолютной величины вектора. А затем выполнить задание 192.***

**4°.** После введения определения *равенства векторов* на формирование умения *применять* его можно предложить учащимся по тексту учебника разобрать решение задачи **2**.

**5°.** Следствия из определения *равных векторов* представляют собой два утверждения: прямое и обратное. Поэтому полезно вспомнить с учащимися, какие утверждения называют прямыми и обратными, после чего записать условия обоих утверждений.

| | |
|---|---|
| *«Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине».*<br>Дано: $\overline{AB} = \overline{CD}$.<br>Доказать: 1. $\lvert \overline{AB} \rvert$ и $\lvert \overline{CD} \rvert$;<br>2. $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направлены. | *«Если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны».*<br>Дано: $\lvert \overline{AB} \rvert$ и $\lvert \overline{CD} \rvert$;<br>$\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направлены.<br>Доказать: $\overline{AB} = \overline{CD}$. |

Доказательство, данное в учебнике, опирается на понятие параллельного переноса, и может вызвать некоторые затруднения у части учащихся, поэтому можно порекомендовать провести его самому учителю в форме фрагмента лекции.

После доказательства следствий из определения *равных векторов*, на формирование умения *применять* эти следствия для распознавания *равных векторов* можно предложить учащимся упражнение:

> Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. По рисунку дайте развернутые ответы на следующие вопросы:
>
> 1. Почему в каждой из пар $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$, $\overline{BO}$ и $\overline{OD}$ векторы равны?
>
> 2. Модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны. Почему векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не равны?
>
> 3. Почему в каждой из пар $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, $\overline{BO}$ и $\overline{OC}$ векторы не равны?
>
> 4. Почему в каждой из пар $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, $\overline{BO}$ и $\overline{BD}$ векторы не равны?

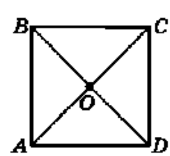



*Рис. 143*

**5°.** В решении задачи 2, доказательствах следствия из определения *равных векторов* и утверждения *о возможности откладывания от любой точки вектора, равного данному*, и *единственности такого вектора*, применяется один и тот же метод: один из векторов подвергается параллельному переносу.

Описание способа откладывания от некоторой точки $O$ вектора, равного данному вектору $\overline{AB}$, целесообразно дать в виде алгоритма по шагам:

1) из точки $O$ провести полупрямую, одинаково направленную с полупрямой $AB$;

2) отложить на этой полупрямой отрезок $OC$, равный отрезку $AB$.

Вектор $\overline{OC}$ и будет равным вектору $\overline{AB}$.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки определений:* ***нулевого вектора и равных векторов****, следствий из равенства векторов. После доказательства следствий из равенства векторов выполнить задания 193 и 194. Упражнения, предлагаемые в рабочей тетради, как правило, являются полным аналогом задач, предлагаемых в методических рекомендациях. После рассмотрения способа откладывания от некоторой точки O вектора, равного данному, по этому алгоритму выполнить упражнение 195.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 91 и 92, решить задачу 2; дома — вопросы 1–7 из § 10, задачи 1 и 3.

## Указания к задачам

Задачи 1 и 3 решаются без обоснований, с опорой на рисунок.

# Координаты вектора

## Комментарий для учителя

1. В этом пункте вводятся координаты вектора, которые в отличие от координат точки, однозначно определяющих ее положение, определяют его с точностью до равенства, т.е. задают не единственный вектор, а множество одинаково направленных векторов, имеющих равные абсолютные величины.

**Текущие результаты** изучения пунктов 93. Учащиеся должны:

– *объяснять* понятие *координат вектора*;

– *формулировать, объяснять и иллюстрировать* необходимое и достаточное условия *равенства векторов*, заданных в координатной форме;

– *находить* координаты вектора по координатам его начала и конца;

– *вычислять* абсолютную величину вектора по его координатам;

– *решать* задачи на вычисление *координат вектора* и его *абсолютной величины*; на доказательство *равенства векторов*.

## Методические рекомендации к изучению материала

1°. Введение координат вектора удобно провести с использованием плаката такого типа, как рисунок 144, сопровождая объяснение вопросами:

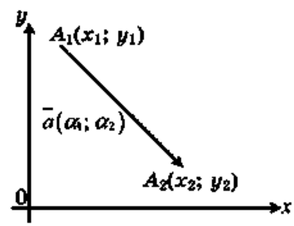



*Рис. 144*

1. Какая точка является началом вектора $\bar{a}$ ?

2. Какая точка является концом вектора $\bar{a}$ ?

3. Как вычисляются координаты вектора $\bar{a}$ ?

4. Как вычисляются модуль вектора $\bar{a}$ ?

5. Какие координаты имеют равные векторы?

В процессе этой работы при обсуждении третьего вопроса полезно записать на доске координаты вектора $\bar{a}$ через координаты его начала и конца и сформулировать правило нахождения координат вектора: *«Для того чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала»*. Для закрепления учебного материала параграфа полезно провести устные вычисления. Для этого можно использовать данные таблицы (рис. 145), где точки $A_1\ \{x_1;\ y_1\}$ и $A_2\ \{x_2;\ y_2\}$ — концы вектора $\overline{A_1A_2}\ \{a_1;\ a_2\}$, а $|\ \overline{a}\ |$ — его модуль, и заполнить пропуски.

| $A_1$ | | $A_2$ | | $\overline{A_1A_2} = \overline{a}$ | | $\lvert \overline{a} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ | $a_1$ | $a_2$ | |
| 3 | 2 | 8 | 14 | | | |
| | | 6 | 8 | | 8 | 10 |
| | | −7 | 13 | −15 | 8 | |
| 1 | −9 | | 12 | 20 | | |
| 14 | | 17 | 2 | | −4 | |
| | | 12 | 27 | 10 | | 26 |

*Рис. 145*

Следует подчеркнуть, что координаты векторов с началом в точке $O\ (0,\ 0)$ совпадают с координатами их концов.

***При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся ответить на вопросы задания 196 и выполнить задание 197. Упражнения 196 и 197, предлагаемые в рабочей тетради, являются полным аналогом предложенных выше плаката (рис. 144) и таблицы (рис. 145).***

**2°.** При выводе ***формулы для вычисления абсолютной величины вектора по его координатам*** полезно вспомнить определение ***абсолютной величины вектора*** и, используя данные рисунка 137, найти расстояние между точками $A_1$ и $A_2$:

$$|\ \overline{a}\ | = |\ \overline{A_1A_2}\ | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ .$$

Затем можно предложить учащимся вычислить абсолютные величины векторов, заданных: а) координатами; б) координатами начала и конца. Для этого можно использовать данные таблицы (рис. 145).

**3°.** Утверждение об определении равенства *векторов* через их координаты содержит в себе два утверждения: прямое и обратное. При доказательстве утверждения полезно сделать записи всех выкладок на доске. А начать следует с записи условий.

| I. *«Равные векторы имеют равные координаты».* | II. *«Если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны».* |
|---|---|
| Дано: $\overline{a} = \overline{a}'$. | Дано: $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$; $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$. |
| Доказать: $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$; $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$. | Доказать: $\overline{a} = \overline{a}'$. |

*Рис. 146*

Доказательство утверждения I.

Пусть параллельный перенос, заданный формулами: $x' = x + c$, $y' = y + d$, переводит вектор $\overline{a}$ $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ в вектор $\overline{a}'(x_2' - x_1', y_2' - y_1')$. При этом начало вектора $\overline{a}$ — точка $A_1(x_1, y_1)$ перейдет в начало вектора $\overline{a}'$ — точку $A_1'(x_1' = x_1 + c, y_1' = y_1 + d)$, а конец вектора $\overline{a}$ — точка $A_2(x_2, y_2)$ перейдет в конец вектора $\overline{a}'$ — точку $A_2'(x_2' = x_2 + c, y_2' = y + d)$. Найдем координаты вектора $\overline{a}'$:

$x_2' - x_1' = (x_2 + c) - (x_1 + c) = x_2 - x_1$ и $y_2' - y_1' = (y_2 + d) - (y_1 + d) = y_2 - y_1$.

Доказательство утверждения II.

Пусть некоторый параллельный перенос переводит начало вектора $\overline{a}$ — точку $A_1(x_1, y_1)$ в начало вектора $\overline{a}'$ — точку $A_1'(x_1' = x_1 + c, y_1' = y_1 + d)$. Найдем отсюда $c = x_1' - x_1$ и $d = y_1' - y_1$. Значит, параллельный перенос задан формулами: $x' = x + (x_1' - x_1)$ и $y' = y + (y_1' - y_1)$.

Точка $A_2(x_2, y_2)$ при этом параллельном переносе переходит в точку $A_2'(x_2' = x_2 + x_1' - x_1, y_2' = y_2 + y_1' - y_1)$. Теперь выразим координаты точки $A_2'(x_2' = x_2 + x_1' - x_1, y_2' = y_2 + y_1' - y_1)$ из условия утверждения II. Как видно полученные координаты точки $A_2'$ совпадают. Значит, параллельный перенос, заданный формулами: $x' = x + (x_1' - x_1)$ и $y' = y + (y_1' - y_1)$, переводит точку $A_1$ в точку $A_1'$, а точку $A_2$ в точку $A_2'$, т.е. переводит вектор $\overline{a}$ в вектор $\overline{a}'$.

Задача 7, решение которой приведено в тексте учебника, является примером применения рассмотренного утверждения.

После рассмотрения утверждения необходимости и достаточности равенства векторов в координатной форме, выполнить упражнения 198 и 199.

### Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 93; решить задачу 7; дома — вопросы 8 и 9 из § 10, задачи 4–6.

### Дополнительные задачи

**1.** Даны точки $A(1, 2)$, $B(3, 0)$, $C(-4, 5)$, и $D(-6, 7)$. Определите, какие из векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ равны.

**2.** Даны точки $A(1, -3)$ и $B(2, 0)$. Найдите такую точку $C(x, y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$ были равны.

## Сложение векторов. Сложение сил

### Комментарий для учителя

В этом пункте начинается изучение действий над векторами. Определение суммы двух векторов дается в координатной и геометрической формах, при этом рассматриваются два способа построения суммы двух векторов, заданных геометрически (в виде направленных отрезков): правило треугольника и правило параллелограмма.

**Текущие результаты** изучения пункта 94. Учащиеся должны:

– *распознавать* на чертеже и *строить сумму* и *разность* двух векторов, заданных геометрически;

– *находить* координаты *суммы и разности* двух векторов, заданных координатами;

– *формулировать, объяснять и иллюстрировать* определения: определение *суммы* и *разности* двух векторов, *сочетательный* и *переместительный* законы сложения, формулировку теоремы 10.1;

– *формулировать* и *объяснять* необходимое и достаточное условия равенства векторов;

– *решать* задачи, применяя полученные знания.

### Методические рекомендации к изучению материала

**1°.** При объяснении определения *суммы векторов*, следует подчеркнуть, что эта сумма — вектор. После введения определения *суммы векторов* можно предложить несколько упражнений типа:

> Найдите сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если: а) $\overline{a}$ (2, 5) и $\overline{b}$ (3, 1); б) $\overline{a}$ (−2, 5) и $\overline{b}$ (2, −5).

Из решения задачи видно, что суммой векторов может быть *нулевой вектор*.

Из курса «Математики» учащиеся знают, что для суммы чисел выполняются сочетательный и переместительный законы сложения. Так как обоснование законов сложения предусмотрено вопросами, то полезно предложить проверить верность этих законов.

> Пусть даны векторы $\overline{a}\,(a_1, a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1, b_2)$ и $\overline{c}\,(c_1, c_2)$. Докажите, что а) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$; б) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

**2°.** Доказательство теоремы 10.1 достаточно просто, поэтому после формулировки теоремы и ее краткой записи на доске его можно провести с участием учащихся.

После доказательства теоремы 10.1 на формирование умения *применять* ее можно предложить учащимся упражнение 8 а) из учебника.

**3°.** Описание алгоритмов *построения суммы двух векторов*: правила треугольника и правила параллелограмма — целесообразно дать по шагам. При работе над построением суммы и разности векторов полезно использовать плакат такого типа, как на рисунке 147.

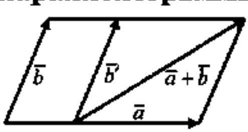
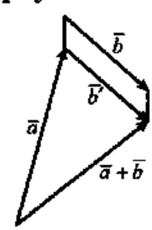
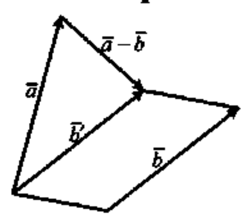
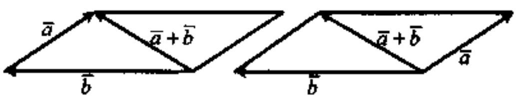
| **Правило параллелограмма** | **Правило треугольника** | **Разность векторов** |
|---|---|---|
|  |  |  |
| 1. от начала вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}'$, равный вектору $\overline{b}$;<br>2. на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}'$ как на сторонах построить параллелограмм;<br>3. провести из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектор — диагональ параллелограмма.<br><u>Вывод</u>: Полученный вектор и будет суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. | 1. от конца вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}'$, равный вектору $\overline{b}$;<br>2. провести вектор из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}'$.<br><u>Вывод</u>: Полученный вектор и будет суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. | 1. от начала вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}'$, равный вектору $\overline{b}$;<br>2. провести вектор из конца вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}'$.<br><u>Вывод</u>: Полученный вектор и будет разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. |

*Рис. 147*

Следует заметить, что правило параллелограмма неприменимо в случае, когда слагаемые векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, а правило треугольника применимо и в этом случае. Можно предложить учащимся проверить эти утверждения.

После рассмотрения алгоритмов построения суммы векторов на их применение можно предложить учащимся задачу 9 (2, 4) из учебника и упражнение на распознавание:

1. Какой из рисунков 148 соответствует:




1) 2)

Рис. 148

а) Правилу параллелограмма сложения векторов.

б) Правилу треугольника сложения векторов?

4°. После введения определения *разности двух векторов* следует предложить упражнение на нахождение разности векторов, заданных координатами, например, задачу 10 (2) из учебника. Геометрическая интерпретация разности двух векторов рассматривается в задаче 11 из учебника. После решения задачи 11, сформулировать правило построения разности векторов, заданных геометрически (рис. 147).

5°. Материал пункта 95 является иллюстрационным к пониманию темы «Сложение векторов» и включается в материал изучения по усмотрению учителя

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения суммы и разности векторов, переместительный и сочетательный законы сложения. Затем выполнить упражнения 200 и 201.*

## Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 94; решить задачи 8 а), 9 (2, 4), 10 (2), 11 и 14 (1); дома — вопросы 10–16 из § 10, задачи 8 б), 9 (1, 3), 10 (1), 13 (2)и 14 (2).

### Указания к задачам

В <u>задаче 14 (2)</u> нужно от конца вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}$ и провести вектор из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, получим вектор $\overline{a}+\overline{b}$. Получили треугольник со сторонами $|\overline{a}|$, $|\overline{b}|$ и $|\overline{a}+\overline{b}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника (теорема 7.3) $|\overline{a}+\overline{b}|\le|\overline{a}|+|\overline{b}|$.

<u>Задача 14 (1)</u> несколько проще, поскольку в условии треугольник уже задан концами векторов.

## Умножение вектора на число

### Комментарий для учителя

В этом пункте вводится еще одна операция над векторами, а именно, умножение вектора на число. Определение произведения вектора на число дается для векторов, заданных координатами, а затем в теореме 10.2 выясняется его геометрический смысл, а именно, как изменяются абсолютная величина и направление вектора при умножении его на число.

**Текущие результаты** изучения пункта 96. Учащиеся должны:

– *строить* вектор $\lambda\overline{a}$, если вектор $\overline{a}$, задан геометрически;

– *находить* координаты вектора $\lambda\overline{a}$, если известны координаты вектора $\overline{a}$;

– *формулировать* и *объяснять* определение *произведения вектора на число*, два распределительных закона *произведения вектора на число*, формулировку теоремы 10.2;

– *решать* задачи, применяя полученные знания.

### Методические рекомендации к изучению материала

1°. При объяснении определения *произведения вектора на число*, следует подчеркнуть, что это произведение — вектор. После введения определения *произведения вектора на число* можно предложить несколько упражнений типа:

> Найдите произведение вектора $\overline{a}$ на число: а) $\overline{a}(2, 5)\cdot 4$; б) $\overline{a}(-2, 5)\cdot 0$.

Из решения задачи видно, что *произведением вектора на число* 0 является *нулевой вектор*.

Из курса «Математики» учащиеся знают, что для чисел выполняется распределительный закон. Полезно предложить учащимся проверить верность этого закона для *произведения вектора на число.*

Даны числа $\lambda$ и $\mu$ и некоторый вектор $\overline{a}\,(a_1, a_2)$. Докажите, что

$$(\lambda + \mu)\,\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}.$$

Даны векторы $\overline{a}\,(a_1, a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1, b_2)$ и некоторое число $\lambda$. Докажите, что

$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.

После выполнения этих выкладок полезно на формирование умений проводить операции умножения и сложения над векторами и предложить несколько упражнений.

Найдите координаты вектора $\overline{c}$, если:
1. $\overline{c} = 7\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{a}\,(1, -1)$ и $\overline{b}\,(5, -2)$;
2. $\overline{c} = 3(-2\overline{a} - 4\overline{b})$, $\overline{a}\,(1, 5)$ и $\overline{b}\,(-1, -1)$.

На формирование наглядных представлений о векторах, полученных в результате операции умножения над векторами, полезно выполнить следующее упражнение.

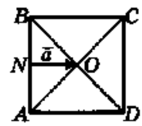


*Рис. 149*

Вектор $\overline{NO} = \overline{a}$. (рис. 149). В квадрате $ABCD$ выразите векторы $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ и через вектор $\overline{a}$.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения произведения вектора на число, формулировки двух распределительных законов произведения вектора на число. Затем выполнить упражнения 202–205.*

**2°.** Формулировка теоремы 10.2 содержит в себе два утверждения: «*Абсолютная величина вектора* $\lambda\overline{a}$ *равна* $\lambda|\overline{a}|$» и «*Направление вектора* $\lambda\overline{a}$ *при* $\overline{a} \neq 0$ *совпадает с направлением вектора* $\overline{a}$, *если* $\lambda > 0$, *и противоположно направлению вектора* $\overline{a}$, *если* $\lambda < 0$.»

Доказательство достаточно просто, поэтому его можно предложить учащимся в качестве упражнения.

Изучение второго утверждения начинается с формулировки теоремы и выполнения краткой записи условия и заключения. Формулировка второго утверждения теоремы 10.1 содержит в себе так же два утверждения, поэтому полезно сделать две записи условия и заключения (рис. 150):

| I. *«Направление вектора $\lambda\overline{a}$ при $\overline{a} \neq 0$ совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$».* | II. *«Направление вектора $\lambda\overline{a}$ при $\overline{a} \neq 0$* противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda < 0$». |
|---|---|
| Дано: $\overline{a} \neq 0$; $\lambda > 0$<br>Доказать: $\lambda\overline{a}$ и $\overline{a}$ одинаково направлены | Дано: $\overline{a} \neq 0$; $\lambda < 0$<br>Доказать: $\lambda\overline{a}$ и $\overline{a}$ противоположно направлены |

*Рис. 150*

Приступая к доказательству теоремы 10.2, необходимо вспомнить либо из курса алгебры, либо, если в классе рассматривался этот вопрос, из § 8 уравнение прямой $y = kx + q$.

Доказательство можно провести по следующему плану:

1. Введем систему координат.

2. От начала координат отложим вектор $\overline{OA} = \overline{a}$, его координаты $a_1$, $a_2$, и вектор $\overline{OB} = \lambda\overline{a}$, его координаты $\lambda a_1$, $\lambda a_2$. Уравнение прямой, проходящей через начало координат $y = kx$. Доказать, что эти векторы лежат на одной прямой.

3. Доказать утверждение I.

4. Доказать утверждение II.

Доказательство можно провести устно, по ходу доказательства дополняя рисунок 151.

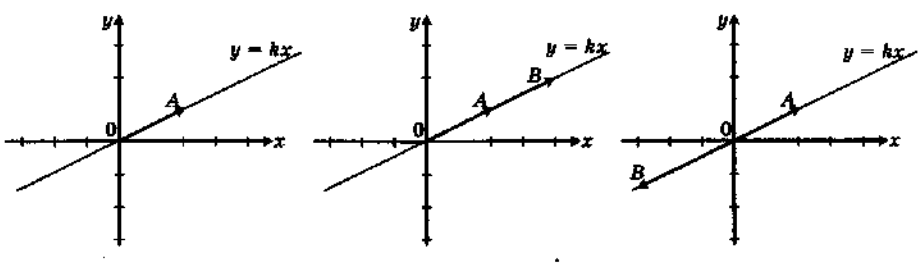



*Рис. 151*

На формирование умений применять теорему 10.2 можно предложить задачи 18 и 20 (3) из учебника.

3°. Материал пункта 97 не является программным, однако представляется полезным ввести определение *коллинеарных векторов* и сформулировать утверждения о пропорциональности координат *коллинеарных векторов* (задача 24 из учебника) и утверждения о разложении вектора по двум *неколлинеарным векторам* (задача 27 из учебника с числовыми данными).

Доказательство этих утверждений опирается на определение *произведения вектора* на *число* и определение *коллинеарных векторов*, и его можно предложить учащимся для самостоятельной работы.

Если материал пункта 97 включается в изучение на уроке, то задачи 21 и 22 из учебника можно либо задать на дом, либо оставить на урок обобщения и систематизации знаний.

**4°**. В процессе изучении темы «*Векторы*» рекомендуется один урок посвятить внутри тематическому повторению: повторить теоретический материал пунктов **91–96** в процессе решения задач и провести самостоятельную работу, которая включает в себя весь материал параграфа, за исключением скалярного произведения векторов. Для этого урока целесообразно подобрать задачи, включающие в себя несколько действий над векторами в координатной или геометрической формах. Кроме того, полезно рассмотреть геометрические задачи, решаемые с помощью векторов. Для организации повторения можно использовать задачи из списков задач, рекомендованных к данным пунктам учебника, но не решенных в ходе изучения темы.

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 91–96; решить задачи 18, 20 (3), 21 и 22; дома — вопросы 17 и 18 из § 10, задачи 17, 20 (1), 23.

На втором уроке в классе — повторить теоретический материал пунктов 91–96 в ходе решения задач; провести самостоятельную работу; дома — вопросы 14 и 15 из § 8, задачи 55, 58 из § 8.

## Самостоятельная работа по теме: «Векторы».

### *1-й вариант*

**1°**. Даны точки $A(1, -3)$ и $B(2, 0)$. Найдите такую точку $C(x, y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$ были равны.

**2°**. Даны $\bar{c}$ $(4, -3)$ и $\bar{b}$ $(-2,1)$. Найдите координаты векторов $\bar{c}+\bar{b}$ и $\bar{c}-\bar{b}$. Вычислите абсолютную величину вектора $\bar{c}+\bar{b}$.

**3.** В трапеции $ABCD$ проведена средняя линия $FE$. Пусть $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{c}$ и $\overline{DA} = \overline{b}$. Выразите векторы $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{FE}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

*2-й вариант*

**1°.** Даны точки $A(1, 2)$, $B(3, 0)$, $C(-4, 2)$, и $D(-9, 7)$. Определите, какие из векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ равны по модулю.

**2°.** Даны $\overline{c}\,(-3, 2)$ и $\overline{b}\,(1, 6)$. Найдите координаты векторов $\overline{c} + \overline{b}$ и $\overline{c} - \overline{b}$. Вычислите абсолютную величину вектора $\overline{c} + \overline{b}$.

**3.** В трапеции $ABCD$ проведены диагонали $AC$ и $BD$. Пусть $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{c}$ и $\overline{DA} = \overline{b}$. Выразите векторы $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, и $\overline{BD}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

## Указания к задачам

Задачу 21 необходимо решить в классе или ее решение проверить в классе, так как при ее решении используется «*дополнительное построение*». При этом следует активно использовать рисунки. На рисунке 142 отражено условие задачи.

План решения задачи (рис. 143):

1. Дополнительное построение $\overline{MD} = \overline{BM}$, $\overline{BD} = 2\overline{BM}$.
2. $\Delta AMB = \Delta CMD$ (по первому признаку).
3. Тогда $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, т.е. $\overline{BA} = \overline{CD}$.
4. $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$, отсюда $\overline{BM} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{BA})$.

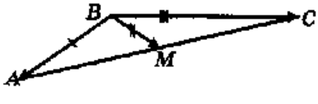



*Рис. 142*


*Рис. 143*

Задача имеет и второе решения: введем координат точек $A$, $B$ и $C$. Выразим координаты точки $M$ через координаты точек $A$ и $C$. Затем найдем координаты векторов и, используя правила сложения и умножения вектора на число, выразим координаты вектора $\overline{BM}$ через координаты векторов $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$.

Решение задачи 22 аналогично решению задачи 21.

План решения задачи (рис. 144):

1. Дополнительное построение $\overline{DF} = \overline{AC}$;
2. $CADF$ — параллелограмм;
3. Точка $N$ середина $AF$, $MN$ — средняя линия треугольника $ABF$.
4. $\overline{BF} = \overline{BD} + \overline{DF}$, отсюда $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{BD} + \overline{AC})$.

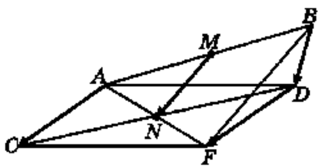


*Рис. 144*

Задача имеет и второе решения: введем координат точек $A$, $B$, $C$ и $D$. Выразим координаты точек $M$ и $N$ через координаты данных точек. Затем найдем координаты векторов и, используя правила сложения и умножения вектора на число, выразим координаты вектора $\overline{MN}$ через векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$.

## Дополнительные задачи

**1.** Используя векторный метод, докажите теорему о средней линии треугольника.

**2.** Используя векторный метод, докажите теорему о средней линии трапеции.

**3.** Используя векторный метод, докажите, что отрезки, соединяющие середины сторон произвольного четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.

# Скалярное произведение векторов. Разложение вектора по координатным осям

## Комментарий для учителя

В этом пункте вводится еще одна операция над векторами, а именно, *скалярное произведение векторов*. Определение *скалярного произведения векторов* дается для векторов, заданных координатами. Теорема 10.3 задает метод нахождения угла между векторами, что в свою очередь позволяет сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов.

**Текущие результаты изучения пунктов 98. Учащиеся должны:**

– *формулировать* и *объяснять* определения: *скалярного произведения векторов* и угла между векторами;

– *формулировать, объяснять и иллюстрировать* распределительный закон *скалярного произведения векторов*;

– *формулировать, объяснять и иллюстрировать* необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов;

– *формулировать* и *объяснять формулировку* теоремы 10.3;

– *вычислять скалярное произведение векторов*, значение угла между векторами;

– *решать* задачи на вычисление и доказательство, используя *скалярное произведение векторов* и его свойства.

## Методические рекомендации к изучению материала

**1°**. При объяснении определения *скалярного произведения векторов*, следует подчеркнуть, что это произведение — число. В результате всех рассмотренных операций над векторами (сумма, разность, произведение вектора на число) мы получали снова вектор, а в результате *скалярного произведения векторов* получаем число, а не вектор.

После введения определения *скалярного произведения векторов* можно предложить на его непосредственное применение несколько упражнений типа:

> Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ : а) $\overline{a}\,(2, 5)$, $\overline{b}\,(1, 3)$; б) $\overline{a}\,(-2, 5)$, $\overline{b}\,(2, -5)$

Найдите скалярное произведение вектора $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ самого на себя, т.е. $\overline{a}\cdot\overline{a}$.

Из решения задачи видно, что $\overline{a}\cdot\overline{a} = \overline{a}^{\,2} = a_1^2 + a_2^2 = |\,\overline{a}\,|^2$.

Учащиеся знают, что для *произведения вектора на число* выполняется распределительный закон. Полезно предложить им проверить верность этого закона для *скалярного произведения векторов*.

> Даны векторы $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)$, $\overline{b}\,(b_1;\ b_2)$ и $\overline{c}\,(c_1;\ c_2)$. Докажите, что $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c}$.

На непосредственное применение распределительного закона *скалярного произведения векторов* можно предложить следующие упражнения.

1. Найдите чему равно $(\bar{a} + \bar{b})^2$.

Решение: $(\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})\bar{a} + (\bar{a} + \bar{b})\bar{b} = \bar{a}\,\bar{a} + \bar{b}\,\bar{a} + \bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}\,\bar{b} = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2$. Отсюда, $(\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2$.

Формула для квадрата разности и разности квадратов выводится аналогично.

2. Найдите чему равно $(\bar{a} - \bar{b})^2$.
3. Найдите чему равно $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + \bar{b})$.
4. Найдите чему равно $|\bar{a} + \bar{b}|^2$.

Решение: $|\bar{a} + \bar{b}|^2$ по определению равно $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})^2$.

Отсюда $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2$.

$|\bar{a}|^2$ по определению равно $\bar{a}\,\bar{a} = \bar{a}^2$.

$|\bar{b}|^2$ по определению равно $\bar{b}\,\bar{b} = \bar{b}^2$.

Значит $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2$.

Из решения упражнения **4** можно выразить $2\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a} + \bar{b}|^2 - |\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2$. Отсюда следует, что *скалярное произведение* $\bar{a}\,\bar{b}$ выражается через модули векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a} + \bar{b}$ и поэтому не зависит от выбора системы координат.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение **скалярного произведения векторов**, формулировки распределительного закона **скалярного произведения векторов**. Затем выполнить упражнения 205–207.*

**2°**. После введения определения *угла между векторами* можно предложить учащимся следующие упражнения на его закрепление.

1. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 145).

2. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BD}$ (рис. 145).

3. Найдите угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ (рис. 145).

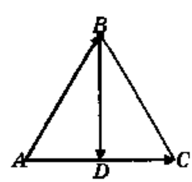



Рис. 145

Заметим, что при решении первого упражнения данные векторы имеют общее начало — точку $A$. Во втором — необходимо построить вектор, равный вектору $\overline{BD}$ с началом в точке $A$, или вектор, равный вектору $\overline{AB}$ с началом в точке $B$.

**3°.** При проведении *доказательства теоремы* 10.3 напомним учащимся о независимости *скалярного произведения* от выбора системы координат, доказанной в упражнении 4. Затем введем систему координат удобным для данного случая образом (рис. 146).

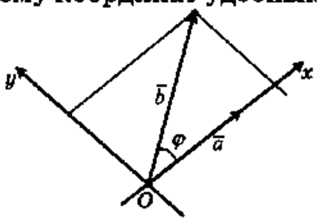



Рис. 146

По определению синуса и косинуса для любого угла (§ 8) вычислим координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}(|\overline{a}|, 0)$ и $\overline{b}(|\overline{b}|\cos\varphi, |\overline{b}|\sin\varphi)$. Найдем *скалярное произведение* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi + 0|\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$.

Таким образом, приравнивая два выражения для нахождения *скалярное произведение* векторов, получим:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$$

Полученная формула для вычисления $\cos\varphi$ дает возможность отыскания углов между векторами, если известны их координаты и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не нулевые. На непосредственное применение полученной формулы можно решить задачи 28, 32 и 33 (найти по одному из углов треугольника) из учебника. Затем можно сформулировать следствия из теоремы 10.3 в виде упражнений (рис. 147). Их доказательство следует непосредственно из выражения $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$.

| | |
|---|---|
| I. *«Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю»*.<br>Дано: $\overline{a} \perp \overline{b}$<br>Доказать: $\overline{a}\,\overline{b} = 0$ | II. *«Если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны»*.<br>Дано: $\overline{a}\,\overline{b} = 0$<br>Доказать: $\overline{a} \perp \overline{b}$ |

Рис. 147

На непосредственное применение следствия из теоремы 10.3 можно предложить учащимся решить задачу 35 из учебника.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы 10.3, затем предложить выполнить упражнения 208 и 209, в которых сформулированы следствия из теоремы 10.3. Разобрать приведенное в тетради решение задачи 208 и аналогично решить задачу 209. На формирование умения применять* ***скалярное произведение*** *для отыскания угла между векторами выполнить упражнения 210–212.*

*Задачи 213–216 повышенного уровня сложности даны с ответами. Аналогичные задачи используются в тесте 10 сборника тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение».*

**4°**. Материал темы «Разложение вектора по координатным осям» не является программным. Заметим, что тема не включена в вопросы для повторения. Поэтому ее изучение ведется в ознакомительном порядке. Учитель может сам принять решение о включении ее в материал, обязательный к изучению. Если тема будет изучаться, то его можно предложить учащимся для самостоятельного изучения на уроке.

**5°**. Подготовку к контрольной работе по теме: «Векторы» полезно организовать, как урок решения задачи. Для этого можно использовать задачи: **15, 16, 19, 20 (2), 30, 31, 39, 40, 41, 42** из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи».

Контрольная работа состоит из 6 задач: первая с выбором ответа, 2, 3 и 4 со свободным ответом, а 5 и 6 с развернутым ответом.

## Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 98; решить задачи 28, 32, 33 и 35; дома — вопросы 21–26 из § 10, задачи 29, 34, 36 и 43.

На втором уроке в классе — провести систематизацию знаний по теме «Векторы».

## Указания к задачам

**32.** Угол $A$ треугольника $ABC$ является углом между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, угол $B$ — между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, угол $C$ — между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. По данным координатам вершин треугольника найдем координаты каждого из этих векторов и определим косинусы углов, применив теорему **10.3.**

Если тема *коллинеарных векторов* не рассматривалась в классе, то при решении задачи 37 следует объяснить учащимся, что это два вектора, которые лежат либо на одной прямой, либо на параллельных. Вектор называют единичными, если его модуль равен единице.

1. Предположим, что $\overline{a} + \overline{b} = 0$ или $\overline{a} - \overline{b} = 0$. Если $\overline{a} + \overline{b} = 0$, то $\overline{a} = -\overline{b}$, т.е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены, а значит, коллинеарны, что противоречит условию задачи. Если $\overline{a} - \overline{b} = 0$, то $\overline{a} = \overline{b}$, т.е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены, а значит, коллинеарны, что противоречит условию задачи. Значит, $\overline{a} + \overline{b} \neq 0$ и $\overline{a} - \overline{b} \neq 0$. Найдем скалярное произведение $(\overline{a} + \overline{b})\cdot(\overline{a} - \overline{b}) =$ $= \overline{a}\cdot\overline{a} + \overline{a}\cdot\overline{b} - \overline{b}\cdot\overline{a} - \overline{b}\cdot\overline{b} = \overline{a}^2 - \overline{b}^2 = |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2 = 1 - 1 = 0$. Так как векторы $\overline{a} + \overline{b} \neq 0$ и $\overline{a} - \overline{b} \neq 0$, а их скалярное произведение равно нулю, эти векторы перпендикулярны.

**41.** Из перпендикулярности данных векторов следует, что $(\overline{a} + \overline{b})\cdot(\overline{a} - \overline{b}) = 0$, т. е. $= |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2 = 0$, откуда $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

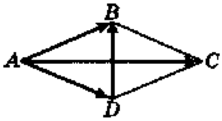



Рис. 147

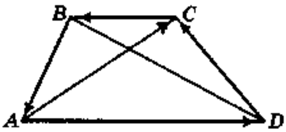
**42.** В _ромбе_ $ABCD$ (рис. 147) $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{DB} = \overline{a} - \overline{b}$. $\overline{AC}\cdot\overline{DB} = (\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} - \overline{b}) = |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2 = 0$.

**43.** Из равенства нулю скалярных произведений векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$, $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$ следует, что все углы данного четырехугольника прямые. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник.

**44.** Доказав, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник (см. предыдущую задачу) и что $\overline{AC} \perp \overline{DB}$, можно утверждать, что $ABCD$ — квадрат.

## Контрольная работа по теме: «Векторы»

### *1-й вариант*




**1.** Дана трапеция $ABCD$. Выразите вектор $\overline{DC}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = \overline{BA}$, $\overline{b} = \overline{AD}$ и $\overline{c} = \overline{CB}$.

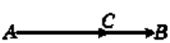
*Ответ:* 1. $\overline{c} + \overline{b} - \overline{a}$; 2. $\overline{a} - \overline{c} + \overline{b}$; 3. $\overline{b} + \overline{a} + \overline{c}$;
4. $-(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$.

**2.** Вектор $\overline{AB} = \overline{a}$. Длина вектора $\overline{CD}$ в три раза больше длины вектора $\overline{AB}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{CD}$ через вектор $\overline{a}$.

*Ответ:* ____________________

**3.** Упростите выражение $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA}$.

*Ответ:* ____________________



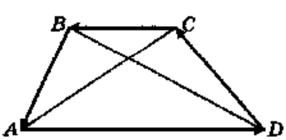

**4.** Точка $C$ лежит на отрезке $AB$, при этом $AC : CB = 2 : 1$. Найдите координаты вектора $\overline{AC}$, если $\overline{AB}$ (6; 15).

*Ответ:* ____________________

**5.** Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

**6.** Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка $O$ является точкой пересечения диагоналей прямоугольника.

### *2-й вариант*




**1.** Дана трапеция $ABCD$. Выразите вектор $\overline{CB}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = \overline{BA}$, $\overline{b} = \overline{AD}$ и $\overline{c} = \overline{DC}$.

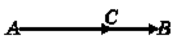
*Ответ:* 1. $\overline{c} + \overline{b} - \overline{a}$; 2. $\overline{a} - \overline{c} + \overline{b}$; 3. $\overline{b} + \overline{a} + \overline{c}$;
4. $-(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$.

**2.** Вектор $\overline{AM} = \overline{m}$. Длина вектора $\overline{MN}$ равна половине длины вектора $\overline{AM}$, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{AM}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{MN}$ через вектор $\overline{m}$.

*Ответ:* ____________________

**3.** Упростите выражение $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC}$.

*Ответ:* ____________________




**4.** Точка $C$ лежит на отрезке $AB$ и $AC : CB = 2 : 1$. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если $\overline{AC} = \overline{a}\ (6; 8)$.

*Ответ:* ____________________

**5.** Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство $|\bar{x} + \bar{y}| \le |\bar{x}| + |\bar{y}|$.

**6.** Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка $O$ является точкой пересечения диагоналей прямоугольника.

# ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

| № § | Тема | число часов | № урока | задачи | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | в классе | дома |
| | **§ 6. Четырехугольник** | | | | |
| 50 | Повторение материала VII класса. Определение четырехугольника | 2 | 1 | | |
| | | | 2 | 5 | 1, 2 |
| 51 | Параллелограм | 1 | | | 3, 4, 6 (1) |
| 52 | Свойство диагоналей параллелограмма | 1 | | 6 | 7 |
| 53 | Свойство противолежащих сторон и углов параллелограмма | 2 | 1 | 18 | 10, 13, 15 (1), 16 (1), 17 |
| | | | 2 | 14, 19, 21, 22(1), 23(2) | 15 (2), 16 (2), 20, 22(2), 23(1) |
| 54 | Прямоугольник | 2 | 1 | 26 | 27, 28, 29 |
| | | | 2 | 24, 25, 31 | 30, 32 |
| 55 | Ромб | 2 | 1 | 33, 34, 40 | 35, 37, 41 |
| 56 | Квадрат | | 2 | 36, 42, 43 | 44, 46 |
| | Заключительный урок по теме: «Параллелограмм и его частные виды» | 1 | | 22, 23, 38,39 | |
| | Контрольная работа | 1 | | | |
| 57 | Теорема Фалеса | 1 | | 48 | 49 |
| 58 | Средняя линия треугольника | 1 | | 50, 51, 55, 56 | 52, 54, 57 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 59 | Трапеция | 2 | 1 | 60 | 61, 67, 68, 69 |
| | | | 2 | 64, 66, 70 | 62, 63, 65 |
| 60 | Пропорциональные отрезки | 2 | | | 72, 74(1) |
| 61 | Построение четвертого пропорционального отрезка | | | 73 и 74(2) | |
| | Систематизация и обобщение знаний | 1 | | | |
| | Контрольная работа | 1 | | | |
| | Резерв | 2 | | | |

## § 7. Теорема Пифагора

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 62 | Косинус угла | 1 | | 1(4) | 1(1, 3) |
| 63 | Теорема Пифагора | 2 | 1 | 2(2), 3(2), 11 | 2(3), 3(3), 6(2), 7 |
| 64 | Египетский треугольник | | 2 | 5, 15 и 17 | 4, 8, 13 и 18 |
| 65 | Перпендикуляр и наклонная | 1 | | 19, 22 | 20, 21 |
| 66 | Неравенство треугольника | 3 | 1 | 23, 24(1), 26, 27 | 24(2), 32, 33 |
| | | | 2 | 40, 41, 42(1, 2) | 25, 28, 29, 42(3) |
| | | | 3 | 34, 35, 36, 37, 38, 39 | 30, 42(4), 43 |
| 67 | Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике | 1 | | 45, 46, 47 | 53, 60, 61(1, в; 2, б) |
| 68 | Основные тригонометрические тождества | 1 | | 62(2, 3, 5), 63(1) | 62(1, 4, 6, 7), 63(3), 64(2), 65(4) |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 69 | Значения синуса, косинуса, и тангенса и котангенса некоторых углов | 1 | | 67, 68 | 66, 69 70 |
| 70 | Изменение sin$\alpha$, cos$\alpha$ и tg$\alpha$ при возрастании угла$\alpha$ | 1 | | 72 (2, 3, 6), 74 | 72 (1, 4, 5), 73 |
| | Систематизация и обобщение знаний | 1 | | | |
| | Контрольная работа | 1 | | | |
| | Резерв | 3 | | | |

## § 8. Декартовы координаты на плоскости

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 71 | Определение декартовых координат | 1 | | 1, 2, 4, 7, 9, 15 | 8, 11, 13 (2), 14 |
| 72 | Координаты середины отрезка | | | | |
| 73 | Расстояние между точками | 1 | | | 17, 18 и 20 |
| 74 | Уравнение окружности | 1 | | 30, 31 | 25, 27, 32, 33 |
| 75 | Уравнение прямой | 3 | 1 | 35, 43, 45 | 8 и 13 (2) из § 5, п.40, 36 (1), 40 (2), 46 и 49 (2) из § 8 |
| 76 | Координаты точки пересечения прямых | | | | |
| 77 | Расположение прямой относительно системы координат | | 2 | 38, 39 (2), 49(1), 50 (1), 51 | 44, 46 и 50 (2, 3) |
| 78 | Угловой коэффициент в уравнении прямой | | 3 | 36(3), 39 (3), 40 (3), 41, 42 | 47, 48, 49 (3) |
| 79 | График линейной функции | | | | |
| 80 | Пересечение прямой с окружностью | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 81. | Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180° | 2 | 1 | 52, 56 (1 и 4), 57 (3), 61 и 62 | 8 и 13 (2) из § 5, п.40, 36 (1), 40 (2), 46 и 49 (2). из § 8 |
| | | | 2 | | |
| | Резерв | 2 | | | |

## § 9. Движение

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 82 | Преобразования фигур | 1 | | | 1, 2 |
| 83 | Свойства движения | | | | |
| 84 | Симметрия относительно точки | 1 | | 4, 6, 7, 9, 10 | 3 , 5 , 8, 11 |
| 85 | Симметрия относительно прямой | 1 | | 14, 16, 17, 20, 25 | 12, 21, 22, 26 |
| 86 | Поворот | | | | |
| 87 | Параллельный перенос и его свойства | 1 | | 27 | 28, 29 |
| 88 | Существование и единственность параллельного переноса | 1 | | 31, 32, 33 | 30, 34 |
| 89 | Сонаправленность полупрямых | | | | |
| 90 | Равенство фигур | 1 | | 44 | 34, 43, 45 |
| | Контрольная работа | 1 | | | |
| | Резерв | 2 | | | |

## § 10. Векторы на плоскости

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 91 | Абсолютная величина вектора и направление вектора | 1 | | 2 | 1, 3 |
| 92 | Равенство векторов | | | | |
| 93 | Координаты вектора | 1 | | 7 | 4, 5, 6 |
| 94 | Сложение векторов | 1 | | 8 а), 9 (2, 4), 10 (2), 11, 14 (1) | 8 б), 9 (1, 3), 10 (1), 13 (2), 14 (2) |
| 96 | Умножение вектора на число | 2 | 1 | 18, 20 (3), 21, 22 | 17, 20 (1), 23 |
| | | | 2 | | 55, 58 из § 8 |
| 98 | Скалярное произведение векторов | 1 | | 28, 32, 33, 35 | 29, 34, 36, 43 |
| | Систематизация и обобщение знаний | 1 | | | |
| | Контрольная работа | 1 | | | |
| | Резерв | 2 | | | |

## Заключительное повторение

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Систематизация и обобщение знаний по курсу 8 класса | 4 | | | |
| | Контрольная работа | 1 | | | |

*Справочное издание*

**Мищенко Татьяна Михайловна**

# Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

# 8 класс

к учебнику А. В. Погорелова
«Геометрия. 7–9 классы»


Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 16466 от 25.03.2013 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректор *Т. И. Шитикова*
Дизайн обложки *А. А. Козлова*
Компьютерная верстка *А. П. Юскова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «Красногорская типография»
143405, Московская обл., г. Красногорск, Коммунальный кв-л, д. 2.
www.ktprint.ru

**По вопросам реализации обращаться по тел.:**
**641-00-30 (многоканальный).**

## *УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!*